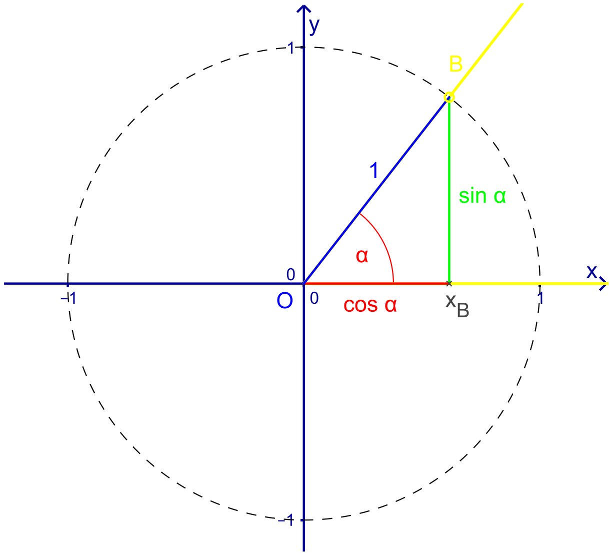
Ďalšie vlastnosti goniometrických funkcií

Na obrázku máme bod B na jednotkovej kružnici, a rovnobežne s y-ovou osou bodom B vznikol pravouhlý trojuholník. Jeho prepona je polomer kružnice – preto má dĺžku 1, a odvesny sú dve súradnice bodu B. V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta – a tak dostaneme vzťah, ktorý spája sínus a kosínus nejakého uhla. Takisto aj goniometrické funkcie vnútorných uhlov sa dajú vyjadriť pomermi strán – ďalšie vzťahy.



V. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

V. $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

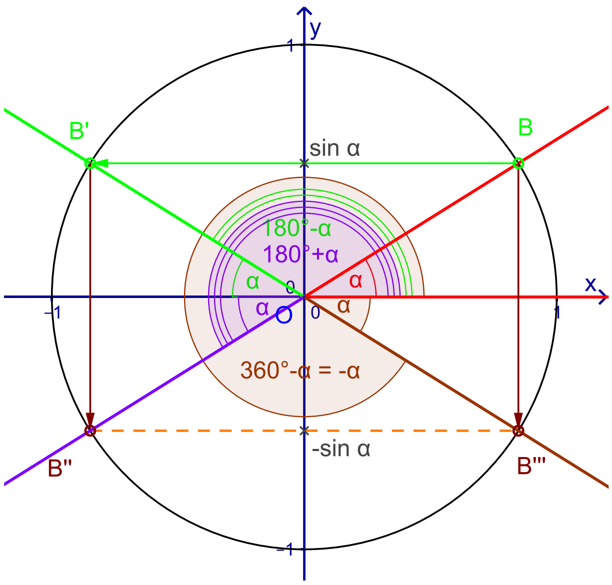
$\mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\ \alpha . \mathrm{cotg}\ \alpha = 1$

Skúsme nájsť uhly, v ktorých goniometrická funkcia nadobudne rovnakú resp. opačnú hodnotu

sínus je y-ová súradnica bodu na jednotkovej kružnici, preto bod s rovnakou y-ovou súradnicou nájdeme symetricky (osovo súmerne) podľa osi y – bod B′

opačné sínusové hodnoty bodom B a B′ nadobudnú v bodoch symetrických podľa osi x – body B‴ a B″



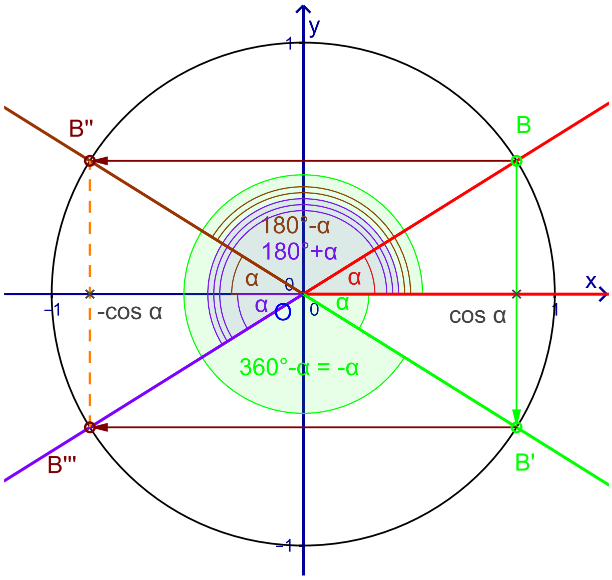
$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ | $\sin x = \sin(\pi - x)$

$\sin\alpha = -\sin(180° + \alpha)$ | $\sin x = -\sin(\pi + x)$

$\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha) = -\sin(-\alpha)$ | $\sin x = -\sin(2\pi - x) = -\sin(-x)$

kosínus je x-ová súradnica bodu na jednotkovej kružnici, preto bod s rovnakou x-ovou súradnicou nájdeme symetricky podľa osi x – bod B′

opačné kosínusové hodnoty nadobudnú v bodoch symetrických podľa osi y bodom B a B′ – body B″ a B‴

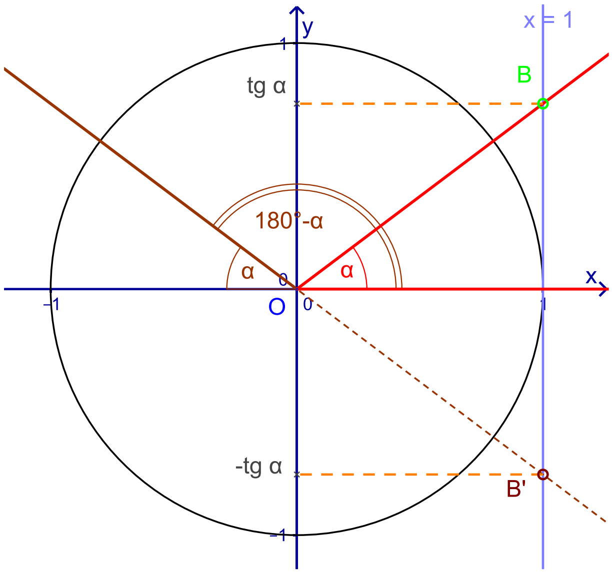


$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha)$ $\quad$ $\cos x = \cos(2\pi - x) = \cos(-x)$

$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ $\quad$ $\cos x = -\cos(\pi - x)$

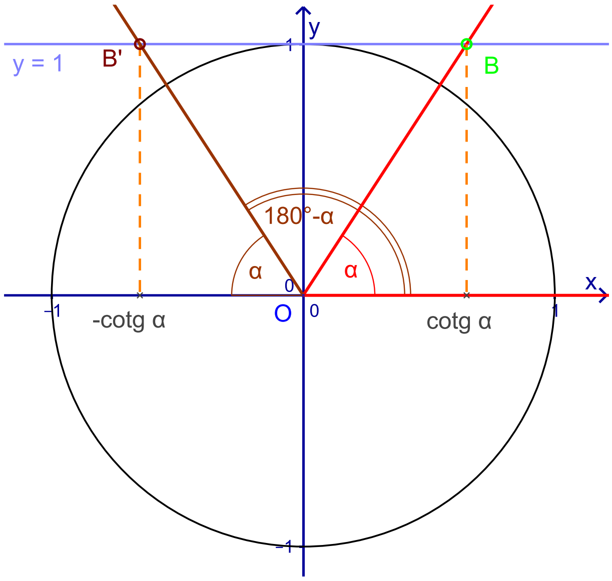
$\cos\alpha = -\cos(180° + \alpha)$ $\quad$ $\cos x = -\cos(\pi + x)$

tangens je y-ová súradnica bodu na dotyčnici x = 1, preto bod s rovnakou (vlastne opačnou – ale leží na priamke obsahujúcej voľné rameno) y-ovou súradnicou nájdeme symetricky podľa začiatku súradnicovej sústavy, ale ten uhol je presne o periódu (180° = π rad) ďalej – máme medzi základnými vlastnosťami funkcie tangens
opačnú tangensovú hodnotu nadobudne v bode symetricky podľa osi x bodu B – bod B′



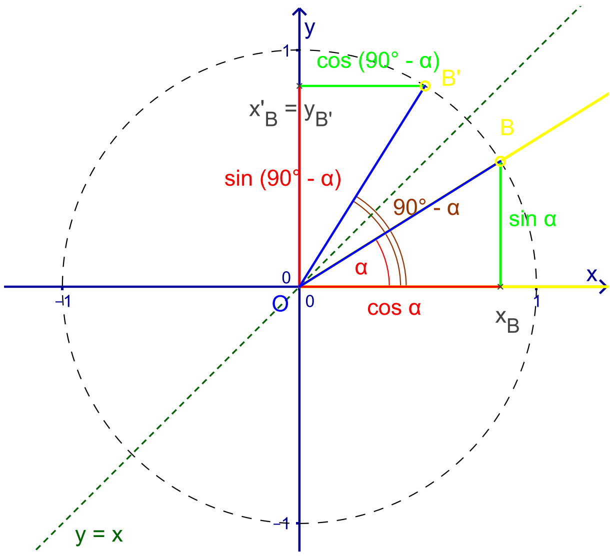
$\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}(180° - \alpha)$ $\quad$ $\mathrm{tg}\,x = -\mathrm{tg}(\pi - x)$

kotangens je x-ová súradnica bodu na dotyčnici y = 1, preto bod s rovnakou y-ovou súradnicou nájdeme symetricky podľa začiatku súradnicovej sústavy, ale ten uhol je presne o periódu (180° = π rad) ďalej – máme medzi základnými vlastnosťami funkcie kotangens
opačnú kotangensovú hodnotu nadobudne v bode symetricky podľa osi y bodu B – bod B′



$\color{red}{\cot \alpha = -\cot(180° - \alpha)}$ $\color{red}{\cot x = -\cot(\pi - x)}$

Ďalšie vzťahy môžeme nájsť ak skúmame goniometrické hodnoty doplnkových uhlov.
Bod B na jednotkovej kružnici patrí k orientovanému uhlu α. Ak doplníme rovnobežne s *y*-ovou osou na pravouhlý trojuholník, odvesny tohto trojuholníka sú goniometrické hodnoty cos α a sin α – ako súradnice bodu na jednotkovej kružnici.
Ak teraz urobíme osovo súmerný obraz podľa priamky s rovnicou y = x k trojuholníku BOx_B, vznikne trojuholník $B'Oy_{B'}$.

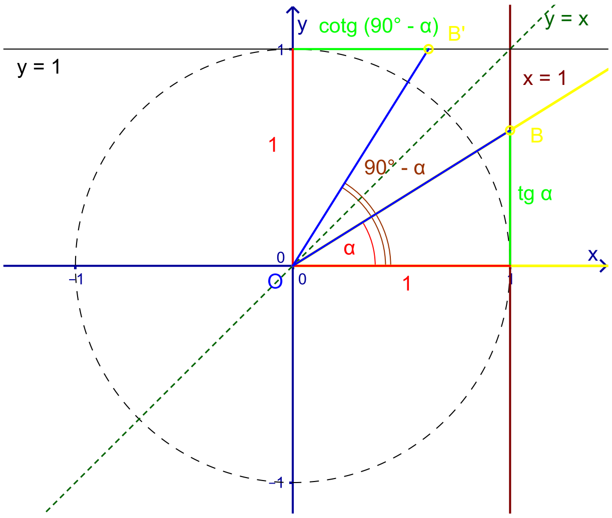


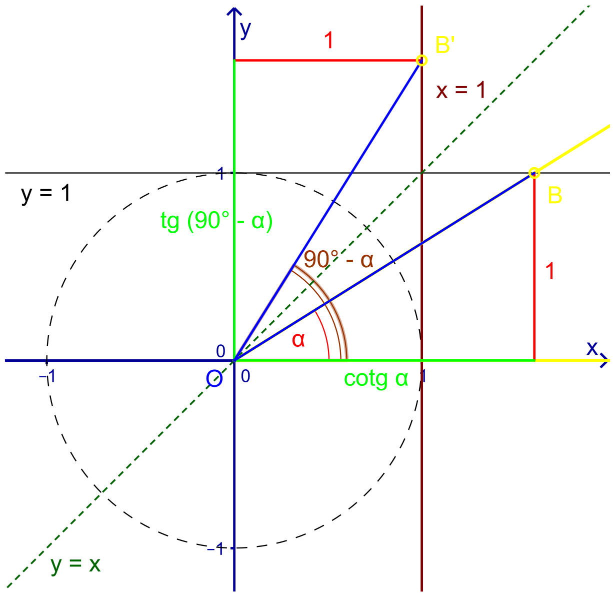
K bodu B′ patrí orientovaný uhol 90° – α: a bod B′ má presne súradnice vymenené. Preto:
V.

$\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Podobne postupujeme aj s tangensom a kotangensom. Znovu urobíme osovo súmerný obraz podľa priamky s rovnicou y = x: bodu B ⟶ B′, priamky x = 1 ⟶ y = 1.





K bodu B′ patrí orientovaný uhol 90° – α: a bod B′ má presne súradnice vymenené. Preto:
V.

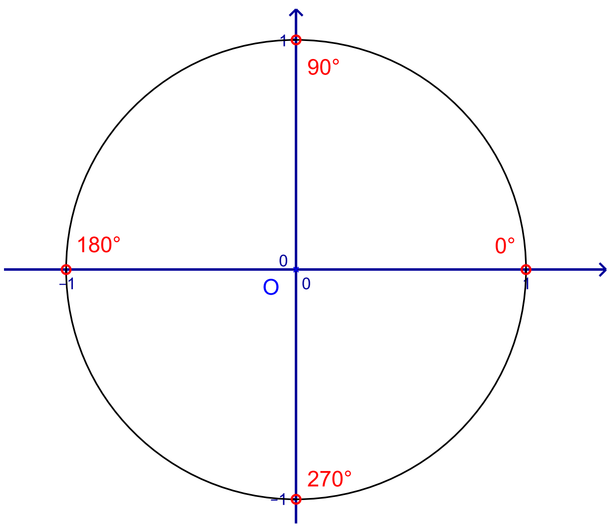
$$\text{tg } \alpha = \text{cotg } (90° - \alpha) \qquad \text{tg } x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{cotg } \alpha = \text{tg } (90° - \alpha) \qquad \text{cotg } x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

P. Práve tieto vlastnosti využili v minulosti pri zostrojení matematických tabuliek – v jednej tabuľke sú sínusové a kosínusové hodnoty (takisto v jednej tangensové a kotangensové hodnoty) ostrých uhlov. Zhora sú sínusové, a zdola ako doplnkové uhly, môžeme prečítať kosínusové hodnoty.

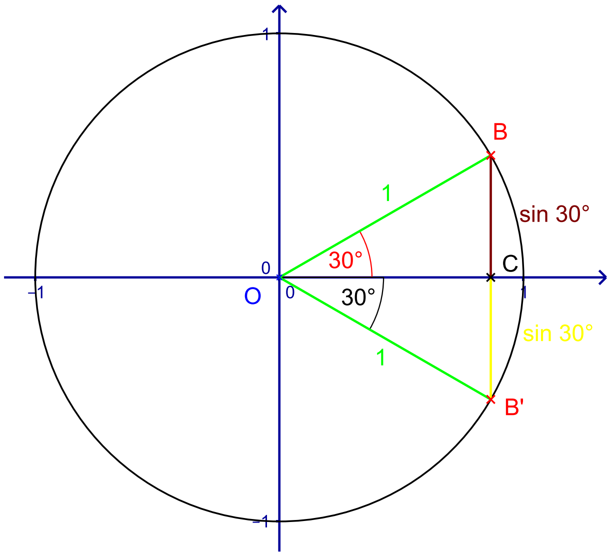
Ešte určme goniometrické hodnoty v niektorých vybraných uhloch. Najprv v osových bodoch: 0° = 360°; 90°; 180°; 270°.

sínus – y-ová súradnica; kosínus – x-ová súradnica; tangens – $\frac{\sin}{\cos}$; kotangens – $\frac{\cos}{\sin}$



	0°	90°	180°	270°
sin x	0	1	0	–1
cos x	1	0	–1	0
tg x	0	–	0	–
cotg x	–	0	–	0

Ďalšie uhly sú ostré: 30°; 45° a 60°. Nakoľko 30° a 60° sú doplnkové uhly, využijeme už známe vzťahy.
Začneme so sínusom 30°-ového uhla.



Na obrázku vzdialenosť BC je sínus 30°. Ak urobíme osovo súmerný obraz bodu B podľa *x*-ovej osi, vznikne bod B′ (takisto vo vzdialenosti sin 30° od bodu C). Trojuholník B′BO je rovnoramenný, lebo strany (ramená) OB a OB′ sú zhodné – polomer jednotkovej kružnice. Uhol ramien (∢BOB′) je dvakrát 30°, čiže 60°. V rovnoramennom trojuholníku uhly na základni sú zhodné. Zvyšok do 180° je 180° – 60° = 120°. To deleno dva je 60° čo vlastne sú uhly na základni. Takže náš rovnoramenný trojuholník má všetky vnútorné uhly 60°-ové ⇒ △BB′O je rovnostranný. Preto |BB′| = 1. Je to dvojnásobok hodnoty sin 30° ⇒ sin 30° = 0,5. Ale túto hodnotu nadobudne aj cos 60° – naraz vypĺňame dva stĺpce tabuľky (vzťahy pre doplnkové uhly)

Pokračujeme s kosínusom 30°-ového uhla. Tu využijeme základný vzťah medzi sínusom a kosínusom.

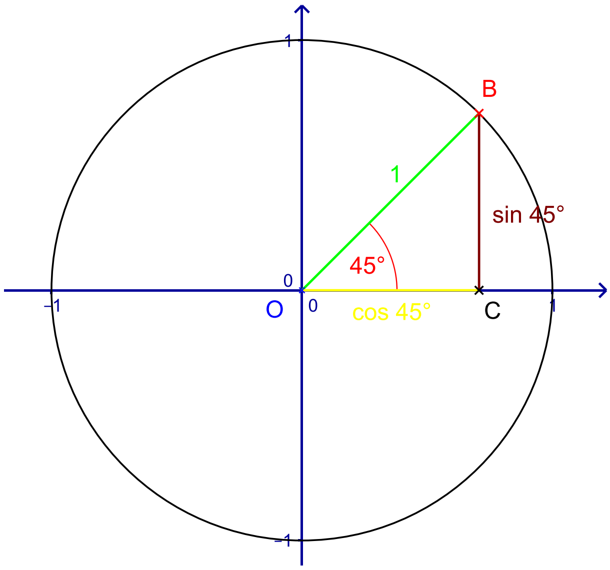
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30° = 1$$
$$\frac{1}{4} + \cos^2 30° = 1 \qquad /-\frac{1}{4}$$
$$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\cos^2 30° = \frac{3}{4} \qquad /\sqrt{}$$
$$\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podobne – sin 60° sa rovná tejto hodnote.
Tangens a kotangens vypočítame ako podiel sínusových a kosínusových hodnôt:

$$\mathrm{tg}\ 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{cotg}\ 60°$$

$$\mathrm{cotg}\ 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} = \mathrm{tg}\ 60°$$

Ostal ešte jeden stĺpec prázdny – goniometrické hodnoty pre 45°-ový uhol



Trojuholník BOC je pravouhlý, a ďalší jeho vnútorný uhol je 45°-ový. Preto ∢OBC je takisto 45°-ový. Ak sú v trojuholníku dva vnútorné uhly zhodné, potom ten trojuholník je rovnoramenný. Konkrétne: strany OC a BC sú zhodné.

To znamená, že sínus a kosínus 45°-ového uhla je rovnaká hodnota. Znovu vychádzame zo základného vzťahu:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$$

a keďže sú rovnaké, prejde do tvaru

$$2.\sin^2 45° = 1 \qquad /:2$$

$$\sin^2 45° = \frac{1}{2} \qquad /\sqrt{}$$

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

Tangens a kotangens 45° je podiel rovnakých hodnôt ⇒ rovnajú sa jednej. A týmto je naša tabuľka vyplnená.

	30°	45°	60°
sin x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$