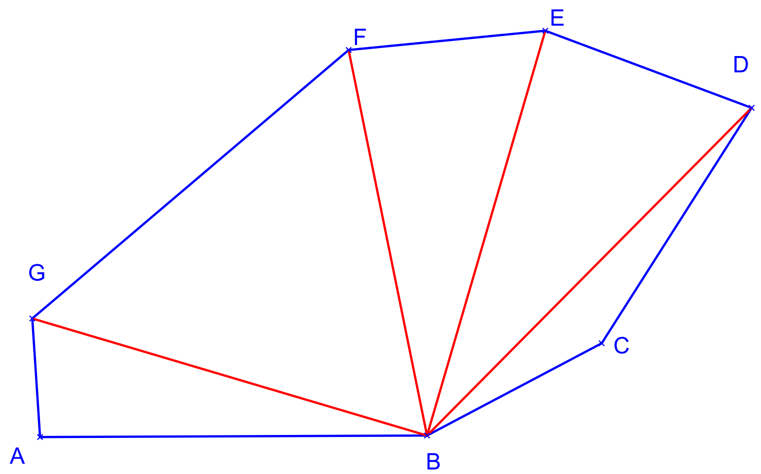
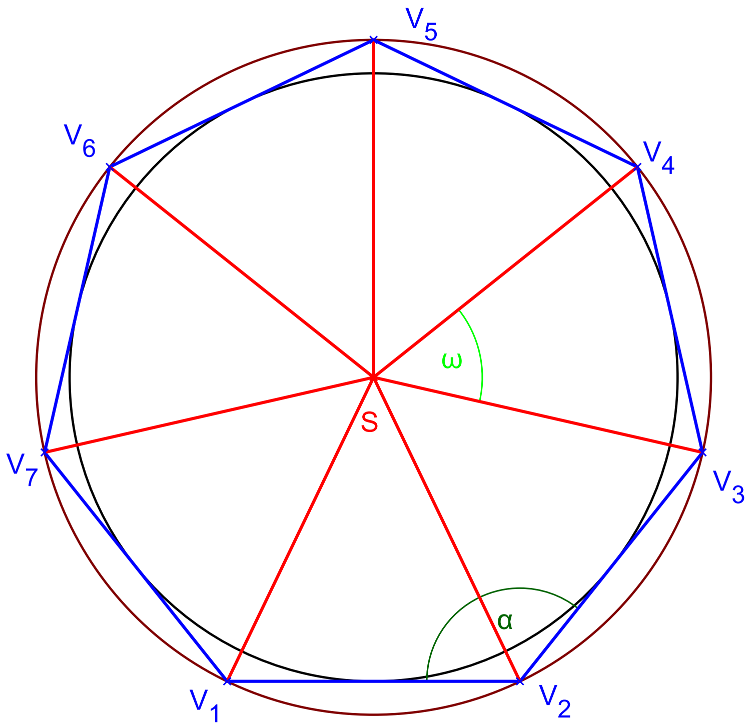
A szabálytalan és a szabályos sokszög kerülete és területe

(Obvod a obsah nepravidelného a pravidelného mnohouholníka)

Ha van egy szabálytalan sokszögünk, a területét alakzatokra történő felosztással határozhatjuk meg, amennyiben rendelkezünk megfelelő adatokkal – legáltalánosabb módszer: háromszögekre való felbontás.

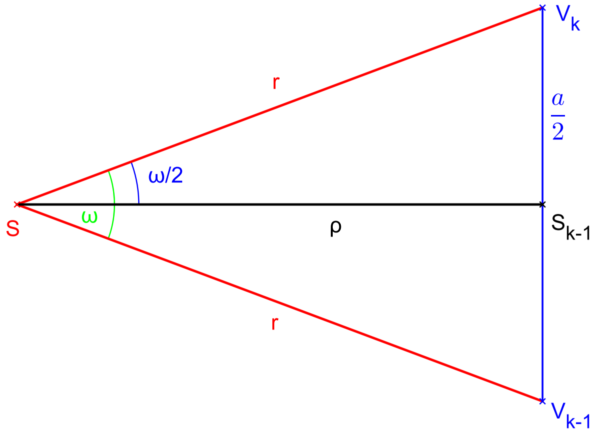


Egy szabályos sokszög egyértelműen adott oldalainak (csúcsainak) számával és egy további adattal az alábbi háromból: oldalhossz, beírt körének sugara, körülírt körének sugara (esetleg legrövidebb átlójának hosszával). Minden szabályos n-szöget feloszthatunk n darab egyenlő szárú háromszögre. Az oldalak számából pedig kiszámíthatjuk ezen háromszögek szárainak ω szögét (középponti szög), ebből pedig az α belső szöget.



$\omega = \frac{360°}{n}$ $\alpha = \frac{n-2}{n}.180° = 180° - \omega$

$o = n.a$



A szabályos n-szög területét egy ilyen egyenlő szárú háromszög területének kiszámításával kezdjük. Klasszikus képlet szerint:

$$S_\triangle = \frac{a.v_a}{2}$$

a háromszögben az a oldalhoz tartozó magasság tulajdonképpen a sokszög beírt körének ρ sugara → behelyettesítjük

$$S_\triangle = \frac{a.\rho}{2}$$

ha szeretnénk egy olyan összefüggést kapni, mely csak az egyik adatot tartalmazza, újabb összefüggést kel találnunk a két elem között – a V_kSS_{k-1} derékszögű háromszögben szögfüggvényt alkalmazunk az egyik befogó a sokszög oldalának a fele $\left(\frac{a}{2}\right)$, a másik pedig a beírt kör sugara (ρ), illetve az egyik hegyesszög a szabályos n-szög középponti szögének a fele $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ⇒ tangens függvényt használunk

$$\text{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} = \frac{a}{2\rho}$$

ebből először a sugarat fejezzük ki – behelyettesítve az alapképletbe kapjuk az egyenlő szárú háromszög területét a sokszög oldalából

$$\text{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2\rho} \qquad /.\rho$$

$$\rho.\text{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2} \qquad /:\text{tg}\frac{\omega}{2}$$

$$\rho = \frac{a}{2.\text{tg}\frac{\omega}{2}}$$

$$S_\triangle = \frac{a.\rho}{2} = \frac{a.\frac{a}{2.\text{tg}\frac{\omega}{2}}}{2} = \frac{a^2}{4.\text{tg}\frac{\omega}{2}}$$

a, ha ismert az n-szög a oldala

$$S = \frac{1}{4}n.a^2.\frac{1}{\text{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{4}n.a^2.\text{cotg}\,\frac{\omega}{2}$$

másodszor az oldalt fejezzük ki – behelyettesítve az alapképletbe kapjuk az egyenlő szárú háromszög területét a sokszög beírt körének sugarából

$$\text{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2\rho} \qquad /.2\rho$$

$$2\rho.\text{tg}\frac{\omega}{2} = a$$

$$S_\triangle = \frac{a.\rho}{2} = \frac{2\rho.\text{tg}\frac{\omega}{2}.\rho}{2} = \rho^2.\text{tg}\,\frac{\omega}{2}$$

b, ha ismert az n-szög beírt körének ρ sugara

$$S = n.\rho^2.\text{tg}\,\frac{\omega}{2}$$

ha új képletünkkel számítjuk a háromszög területét – két oldalból és az általuk közrezárt szögből, megkapjuk harmadik összefüggésünket

$$S_\triangle = \frac{ab.\sin\gamma}{2}$$

a két oldal a szárak, melyek tulajdonképpen a szabályos n-szög köré írt körének r sugara, szögük pedig az n-szög ω középponti szöge

$S_{\triangle} = \frac{r.r.\sin\omega}{2} = \frac{r^2.\sin\omega}{2}$

c, ha ismert az n-szög körülírt körének r sugara

$S = \frac{1}{2}n.r^2.\sin\omega$

további összefüggések

átlóinak száma $m = \frac{n.(n-3)}{2}$

oldala $a = 2\sqrt{r^2 - \rho^2} = 2r.\sin\frac{\omega}{2} = 2\rho.\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{2.\cos\frac{\omega}{2}}$

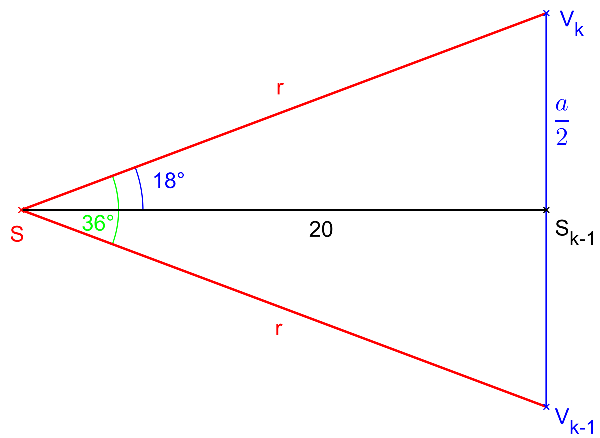
beírt körének sugara $\rho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = r.\cos\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{4.\sin\frac{\omega}{2}}$

körülírt körének sugara $r = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\rho}{\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{e_1}{2.\sin\omega}$

legrövidebb átlója $e_1 = 2a.\cos\frac{\omega}{2} = 4\rho.\sin\frac{\omega}{2} = 2r.\sin\omega$

példa:

Számítsuk ki a szabályos tízszög α belső szögét, a oldalát, o kerületét, r sugarát és S területét, ha ismert beírt körének sugara ρ = 20.



$\omega = \frac{360°}{10} = 36°$

$\alpha = 2.\frac{180°-\omega}{2} = 180° - 36° = 144°$

$\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \rightarrow a = 2.\rho.\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = 2.20.\mathrm{tg}\,18° = 12{,}997$

$o = 10.a = 10.12{,}997 = 129{,}968$

$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\rho}{r} \rightarrow r = \frac{\rho}{\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{20}{\cos 18°} = 21{,}029$

$S = 10.\frac{a.\rho}{2} = 10.\frac{12{,}997.20}{2} = 1\,299{,}68$

Számítsuk ki a szabályos nyolcszög o kerületét és S területét, ha adott a, r = 16; b, ρ = 12; c, a = 8.

$\omega = \frac{360°}{8} = 45°$

$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \rightarrow a = 2.r.\sin\frac{\omega}{2} = 2.16.\sin 22{,}5° = 12{,}246$

$o = 8.a = 8.12{,}246 = 97{,}967$

$S_{\triangle} = \frac{r^2.\sin\omega}{2} = \frac{16^2.\sin 45°}{2} = 90{,}510$

$S = 8.S_{\triangle} = 8.90{,}510 = 724{,}077$

$\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \rightarrow a = 2.\rho.\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = 2.12.\mathrm{tg}\,22{,}5° = 9{,}941$

$o = 8.a = 8.9{,}941 = 79{,}529$

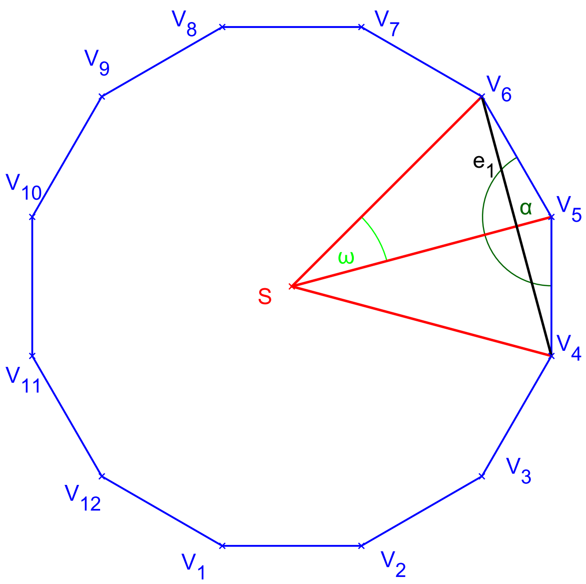
$S = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{9{,}941.12}{2} = 477{,}174$

$o = 8.a = 8.8 = 64$

$tg\,\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \;\longrightarrow\; \rho = \frac{a}{2.tg\frac{\omega}{2}} = \frac{8}{2.tg\,22,5°} = 9,657$

$S = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{8.9,657}{2} = 309,019$

Számítsuk ki a szabályos tizenkétszög o kerületét és S területét, ha legrövidebb átlója $e_1 = 14$.



$\omega = \frac{360°}{12} = 30°$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e_1}{2}}{a} = \frac{e_1}{2a} \;\longrightarrow\; a = \frac{e_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{14}{2\sin 75°} = 7,247$

$o = 12.a = 12.7,247 = 86,963$

$\sin\omega = \frac{\frac{e_1}{2}}{r} = \frac{e_1}{2r} \;\longrightarrow\; r = \frac{e_1}{2\sin\omega} = \frac{14}{2\sin 30°} = 14$

$S_{\triangle} = \frac{r^2.\sin\omega}{2} = \frac{14^2.\sin 30°}{2} = 49$

$S = 12.S_{\triangle} = 12.49 = 588$

$\alpha = 2.\frac{180°-\omega}{2} = 180° - 30° = 150°$