Trigonometrikus egyenletek
(Goniometrické rovnice)

D. Egy egyenlet ***trigonometrikus***, ha ismeretlent tartalmaz egy szögfüggvény argumentumában.

M. Van négy szögfüggvényünk, melyek tulajdonságaikban különböznek az egyes intervallumokon – az egyes síknegyedekben (előjel, monotonitás), ezért mindegyik függvénynél más-más tételt alkalmazunk az egyenlet megoldása során.
A szinusz és a koszinusz függvények a $\langle -1; 1\rangle$ intervallum minden lehetséges értéket kétszer veszik fel a $(0; 2\pi)$ alapintervallumon, kivéve a két határértéket: a -1-et és az 1-et. Az első szöget számológéppel számoljuk ki (ha nincs a táblázatban). De a másikat nekünk kell meghatároznunk – grafikusan (egységkör segítségével) vagy a következő tételek alapján. *(Véleményem szerint egyszerűbb az egységkörrel megtanulni bánni, mint pluszban megtanulni a következő T_1 és T_2 tételeket.)*
A tangens és a kotangens minden valós értéket csak egyszer vesz fel a $(0; \pi)$ alapintervallumon, ezért elegendő ezt számológéppel kiszámítani.

M. A számológép viszont mindig a nullához legközelebbi szöget adja vissza. Ezért a negatív számoknál az arkusz szinusz és arkusz koszinusz függvények negatív értékeket adnak eredményül. Ebből nekünk kell meghatározni a pozitív szöget:

a, grafikusan – az egységkör segítségével határozzuk meg a megfelelő szöget.

b, a szinusz függvénynél
- a negatív szöget kivonjuk π-ből – ez az első pozitív szög radiánban
- a negatív szöget kivonjuk 180°-ból – ez az első pozitív szög fokban
- hozzáadunk 2π-t – ez a második pozitív szög radiánban
- hozzáadunk 360°-ot – ez a második pozitív szög fokban;

a tangens függvénynél
- hozzáadunk π-t
- hozzáadunk 180°-ot.

pl.

arc sin (-0,53) = -0,558 60 rad	$x_1 = \pi - (-0{,}558\ 60) = 3{,}700\ 19$ rad
	$x_2 = 2\pi + (-0{,}558\ 60) = 5{,}724\ 58$ rad
arc sin (-0,923) = -1,175 81 rad	$x_1 = \pi - (-1{,}175\ 81) = 4{,}317\ 40$ rad
	$x_2 = 2\pi + (-1{,}175\ 81) = 5{,}107\ 38$ rad
arc sin (-0,15) = -8,626 9°	$\alpha_1 = 180° - (-8{,}626\ 9°) = 188{,}626\ 9° = 188°37'37''$
	$\alpha_2 = 360° + (-8{,}626\ 9°) = 351{,}373\ 1° = 351°22'23''$
arc sin (-0,873) = -60,809 2°	$\alpha_1 = 180° - (-60{,}809\ 2°) = 240{,}809\ 2° = 240°48'33''$
	$\alpha_2 = 360° + (-60{,}809\ 2°) = 299{,}190\ 8° = 299°11'27''$
arc tg (-0,3) = -0,291 46 rad	$x = \pi + (-0{,}291\ 46) = 2{,}850\ 14$ rad
arc tg (-4,63) = -1,358 08 rad	$x = \pi + (-1{,}358\ 08) = 1{,}783\ 51$ rad
arc tg (-0,2) = -11,309 9°	$\alpha = 180° + (-11{,}309\ 9°) = 168{,}690\ 1° = 168°41'24''$
arc tg (-12,5) = -85,426 1°	$\alpha = 180° + (-85{,}426\ 1°) = 94{,}573\ 9° = 94°34'26''$

M. Mivel mind a négy függvény periodikus (a periódus hosszában is különböznek), ezért minden trigonometrikus egyenletnek, melyet az $\mathbb{R}$-ben oldunk, vagy végtelen sok megoldása van vagy nincs megoldása.

v – kifejezés; $k \in \mathbb{Z}$
$\alpha \in (0; 360°)$; $\beta \in (0; 180°)$
$x \in (0; 2\pi)$; $y \in (0; \pi)$;

T₁. $\sin v = \sin\alpha \Leftrightarrow ((v = \alpha + k.360°) \vee (v = 180° - \alpha + k.360°)$
$\sin v = \sin x \Leftrightarrow ((v = x + k.2\pi) \vee (v = \pi - x + k.2\pi)$

T₂. $\cos v = \cos\alpha \Leftrightarrow ((v = \alpha + k.360°) \vee (v = 360° - \alpha + k.360°)$
$\cos v = \cos x \Leftrightarrow ((v = x + k.2\pi) \vee (v = 2\pi - x + k.2\pi)$

T₃. $\mathrm{tg}\, v = \mathrm{tg}\, \beta \Leftrightarrow v = \beta + k.180°$
$\mathrm{tg}\, v = \mathrm{tg}\, y \Leftrightarrow v = y + k.\pi$

T₄. $\mathrm{cotg}\, v = \mathrm{cotg}\, \beta \Leftrightarrow v = \beta + k.180°$
$\mathrm{cotg}\, v = \mathrm{cotg}\, y \Leftrightarrow v = y + k.\pi$

A legegyszerűbb trigonometrikus egyenlet típus csak egy szögfüggvényt tartalmaz ismeretlennel az argumentumában. Ezen egyenletek megoldásában az a közös, hogy ekvivalens átalakításokkal igyekszünk egy adott alakra hozni – hogy az egyenlet egyik oldalán csak egy szögfüggvény maradjon a másikon pedig egy szám. Utána ezen számhoz számológéppel kiszámítjuk a szöget (hacsak nem szerepel az érték táblázatunkban), mint a megfelelő szögfüggvény inverz függvényét (arc sin x/$\sin^{-1}$ x; arc cos x; …), ahol a függvény felveszi ezt az értéket. Most már felhasználhatjuk az előző tételek valamelyikét. Az utolsó lépés pedig az ismeretlen kifejezése a v kifejezésből.

M. Természetesen ezen típusú egyenlet teljes megoldásához is hozzátartozik az ellenőrzés.

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $4.\sin x = -2\sqrt{2}$.

először kifejezzük a szinuszt az egyenlet bal oldalán– elosztjuk az egyenletet

$4.\sin x = -2\sqrt{2}$ /:4

$\sin x = \frac{-2\sqrt{2}}{4}$

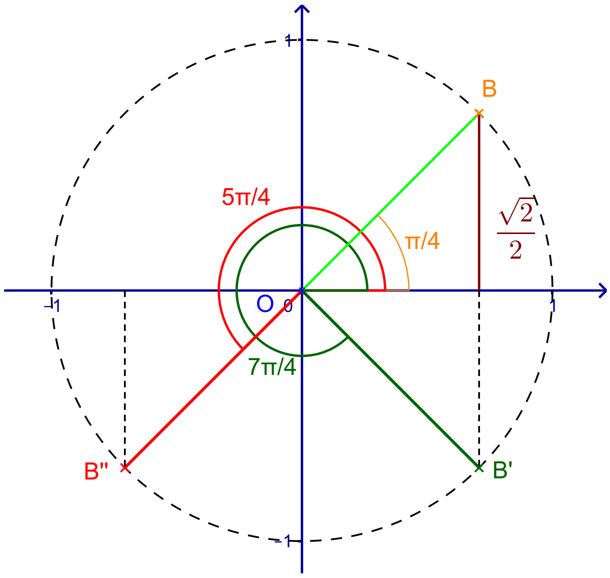
$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

elértük azt az alakot, amit szerettünk volna

a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mint szinusz érték ismert a táblázatból: $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

de nekünk ennek az ellentettje kell → grafikusan oldjuk: egységkört használunk

a szinusz az y koordináta ⇒ negatív értéket az x tengely és az O szerint szimmetrikusan találunk



$\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$ $\sin x = \sin\frac{7\pi}{4}$

$x_1 = \frac{5\pi}{4} + k.2\pi$ $x_2 = \frac{7\pi}{4} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 225° + k.360°$ $x_2 = 315° + k.360°$ $k \in \mathbb{Z}$

M. Ha számológéppel számoltunk volna, az -45°-ot mutatott volna DEG üzemmódban (vagy $-\frac{\pi}{4}$-et RAD-ban).

M. Ha ismeretlenünk latin betűvel szerepel és egyenletünk nem tartalmaz szöget fokmértékben, akkor azt ívmértékben kellene megoldanunk (radiánokban). Hagyományosan görög betűkkel jelöljük a fokmértékben adott szögeket, latin betűkkel az ívmértékben lévőket. Sajnos néha találkozhatunk ezen jelölésmódok keveredésével. Tudom, hogy az ívmérték nem túl népszerű (friss fogalom) – viszont nem gond, ha egy példát, melyben radiánban adott szög található (az argumentumban π többszörösét tartalmazó kifejezés van vagy egy valós szám), ennek ellenére fokmértékben oldunk meg. Csak ekkor az ívmértékben szereplő szöget át kell váltanunk fokokra.

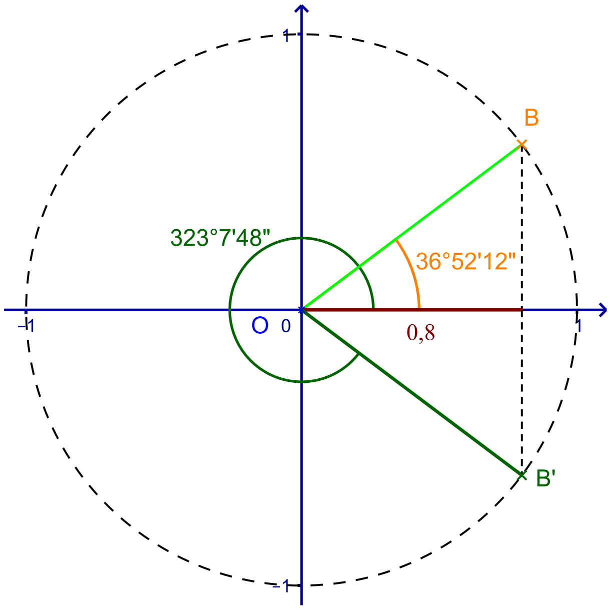
Oldjuk meg az egyenletet: $5.\cos(4\alpha + 15°) = 4$.

$5.\cos(4\alpha + 15°) = 4$ /:5

$\cos(4\alpha + 15°) = 0{,}8$

a szöget számológéppel számoljuk ki: arc cos (0,8) = $\cos^{-1}$ 0,8 = 36°52'12"

egységkör segítségével határozzuk meg a másik szöget a koszinusz az x koordináta ⇒ azonos értéket az x tengellyel szimmetrikusan találunk



cos (4α + 15°) = cos 36°52'12"   cos (4α + 15°) = cos 323°7'48"

még ki kell fejeznünk magát az ismeretlen szöget: α-t

$4\alpha + 15° = 36°52'12'' + k.360°$ $4\alpha + 15° = 323°7'48'' + k.360°$

$4\alpha = 21°52'12'' + k.360°$ $4\alpha = 308°7'48'' + k.360°$

$\alpha_1 = 5°28'3'' + k.90°$ $\alpha_2 = 77°1'57'' + k.90°$ $k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_1 = 0{,}095\ 43 + k.\frac{\pi}{2}$ $\alpha_2 = 1{,}344\ 47 + k.\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

M. Ha az ismeretlen kifejezése során az egyenletet szorozzuk vagy osztjuk, a periódussal is ugyanezt kell tennünk.
Ez azt jelenti, hogy a megoldások vagy gyakrabban (amennyiben osztottunk) vagy ritkábban (ha szoroztunk) lesznek az eredeti periódushoz viszonyítva – ez mindegyik szögfüggvénynél érvényes.

Oldjuk meg az egyenletet: $\frac{2+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x} = 3$.

M. Mivel a tangens és a kotangens függvények nincsenek értelmezve az összes valós számra, ezért az őt tartalmazó egyenleteknél a megoldás előtt még feltételeket kell szabnunk.
Ez az egyenlet ráadásul még törtkifejezést is tartalmaz – ebből is adódnak további kivételek.

a tangens függvény értelmezési tartományából hiányoznak a $\frac{\pi}{2}$ (90°) páratlan többszörösei

$x \neq (2k + 1).\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

a nevezőbe pedig nem kerülhet nulla

$1 - \text{tg}\,x \neq 0$ /+ tg x

$1 \neq \text{tg}\,x$

$x \neq \frac{\pi}{4} + k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

csak ezek után kezdhetjük az átalakításokat végrehajtani

$\frac{2+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x} = 3$ /.(1 – tg x)

$2 + \text{tg}\,x = 3.(1 - \text{tg}\,x)$

$2 + \text{tg}\,x = 3 - 3.\text{tg}\,x$ /+ 3tg x – 2

$4.\text{tg}\,x = 1$ /:4

$\text{tg}\,x = 0{,}25$

számológéppel –RAD üzemmódban

$x = \text{arc tg}\,(0{,}25) = \tan^{-1} 0{,}25$

$x = 0{,}\ 244\ 98$ rad

miután összehasonlítottuk a feltételekkel, írhatjuk csak a megoldást

$x = 0{,}244\ 98 + k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 14°2'10'' + k.180°;\ k \in \mathbb{Z}$

Oldjuk meg az egyenletet: $\frac{3-\text{cotg}\,x}{3+\text{cotg}\,x} = 2$.

a kotangens függvény értelmezési tartományából hiányoznak a π (180°) egész többszörösei

$x \neq k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

a törtkifejezésből adódik a másik feltétel

$3 + \text{cotg } x \neq 0 \qquad /-3$

$\text{cotg } x \neq -3$

M. A kotangens a tangens reciprok értéke – számológépünkön csak a tangens és a reciprok függvény található.

$\frac{1}{\text{tg } x} \neq -3 \qquad /.\text{tg } x$

$1 \neq -3.\text{tg } x \qquad /:(-3)$

$-\frac{1}{3} \neq \text{tg } x$

$x \neq \text{arc tg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$x \neq -0{,}321\ 75$ rad hozzáadjuk a periódust – π

$x \neq 2{,}819\ 84 \text{ rad} + k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

az egyenletet kotangenssel oldjuk – csak a legvégén térünk át tangensre

$\frac{3-\text{cotg } x}{3+\text{cotg } x} = 2 \qquad /.(3 + \text{cotg } x)$

$3 - \text{cotg } x = 2.(3 + \text{cotg } x)$

$3 - \text{cotg } x = 6 + 2.\text{cotg } x \qquad /-6 + \text{cotg } x$

$-3 = 3.\text{cotg } x \qquad /:4$

$-1 = \text{cotg } x$

$-1 = \frac{1}{\text{tg } x}$

$\text{tg } x = -1$

$x = \text{arc tg } (-1) = \tan^{-1} (-1)$

$x = -\frac{\pi}{4}$ rad

hozzáadunk π-t

$x = \frac{3\pi}{4}$ rad

miután összehasonlítottuk a feltételekkel, írhatjuk a megoldást

$x = \frac{3\pi}{4} + k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 135° + k.180°;\ k \in \mathbb{Z}$

A trigonometrikus egyenletek egy következő típusa helyettesítéssel átmegy másodfokú egyenletbe. Itt először megoldjuk a másodfokú egyenletet, majd visszahelyettesítjük a kiszámított gyököt/gyököket a szubsztitúcióba.

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $16.\sin^2 \alpha + 16.\sin \alpha + 3 = 0$.

helyettesítsük

$s = \sin \alpha$

a behelyettesítés után egyenletünk az alábbi alakot ölti

$16s^2 + 16s + 3 = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2-4.16.3}}{2.16} = \frac{-16 \pm \sqrt{256-192}}{32} = \frac{-16 \pm 8}{32} = \begin{cases} \nearrow \frac{-8}{32} = \frac{-1}{4} \\ \searrow \frac{-24}{32} = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

$-\frac{1}{4} = \sin \alpha$

$\alpha = \text{arc sin}\left(-\frac{1}{4}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

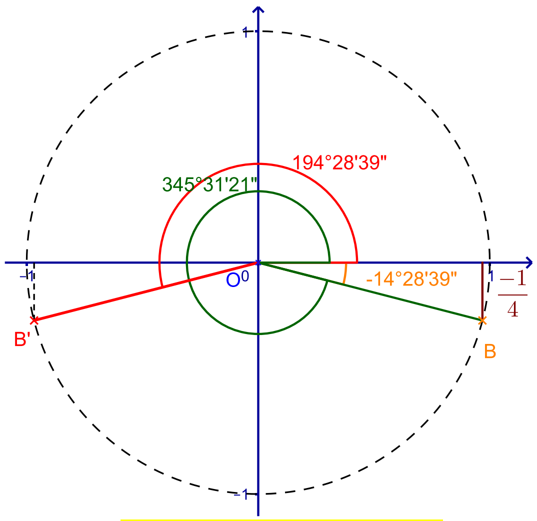
$\alpha = -14°28'39''$

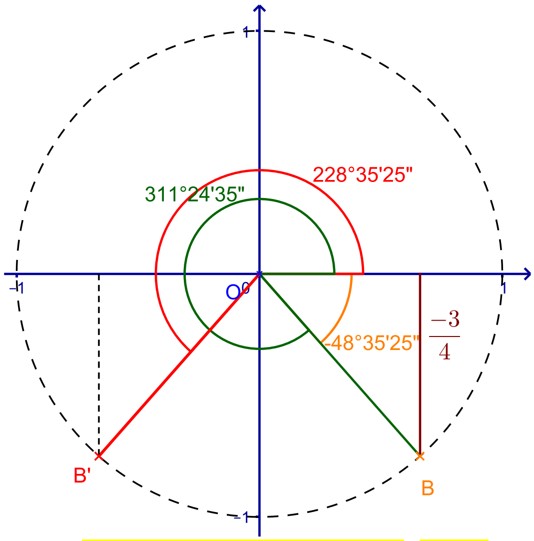
$-\frac{3}{4} = \sin \alpha$

$\alpha = \text{arc sin}\left(-\frac{3}{4}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$

$\alpha = -48°35'25''$

grafikusan határozzuk meg a megoldásokat





$\alpha_1 = 194°28'39'' + k.360°$	$\alpha_3 = 228°35'25'' + k.360°$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
$\alpha_2 = 345°31'21'' + k.360°$	$\alpha_4 = 311°24'35'' + k.360°$
$\alpha_1 = 3{,}394\ 27 + k.2\pi$	$\alpha_3 = 3{,}989\ 65 + k.2\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
$\alpha_2 = 6{,}030\ 51 + k.2\pi$	$\alpha_4 = 5{,}435\ 12 + k.2\pi$

Oldjuk meg az egyenletet: tg x – 4.cotg x = 3.

mindkét szögfüggvényből feltételek következnek

$\text{tg } x \Rightarrow x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{cotg } x \Rightarrow x \neq k.\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

ezek uniója a $\frac{\pi}{2}$ egész tübbszörösét jelenti

$x \neq k.\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

először találunk egyenletünkben két különböző szögfüggvényt – kifejezzük az egyiket a másikkal mivel számológépjeinken nincs kotangens, ezért ezt a függvényt elimináljuk (tüntetjük el)

$$\text{tg } x - 4.\text{cotg } x = 3$$

$$\text{tg } x - 4.\frac{1}{\text{tg } x} = 3 \qquad /.\text{tg } x$$

eltüntetjük a törtet

$$\text{tg}^2 x - 4 = 3.\text{tg } x \qquad /\text{-}3.\text{tg } x$$

$$\text{tg}^2 x - 3.\text{tg } x - 4 = 0$$

helyettesítünk

$s = \text{tg } x$

$$s^2 - 3.s - 4 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow \frac{-2}{2} = -1 \end{matrix}$$

$4 = \text{tg } x$	$-1 = \text{tg } x$
$x = \text{arc tg } 4 = \tan^{-1} 4$	$x = \text{arc tg } (-1) = \tan^{-1} (-1)$
$x = 1{,}325\ 82$ rad	$x = \frac{-\pi}{4}$ rad $\rightarrow x = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

miután összehasonlítottuk a feltételekkel, írhatjuk a megoldásokat

$x_1 = 1{,}325\ 82 + k.\pi$	$x_2 = \frac{3\pi}{4} + k.\pi$	$k \in \mathbb{Z}$
$x_1 = 75°57'50'' + k.180°$	$x_2 = 135° + k.180°$	$k \in \mathbb{Z}$

Oldjuk meg az egyenletet: $2.\sin^2 x - 9.\cos x - 6 = 0$.

ismét két különböző szögfüggvényt tartalmaz egyenletünk – kihasználjuk a szinusz és a koszinusz közötti alapvető összefüggést

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

behelyettesítjük egyenletünkbe

$$2.(1 - \cos^2 x) - 9.\cos x - 6 = 0$$

$$2 - 2.\cos^2 x - 9.\cos x - 6 = 0$$

$-2.\cos^2 x - 9.\cos x - 4 = 0$ /.(-1)

$2.\cos^2 x + 9.\cos x + 4 = 0$

szubsztitúciót alkalmazva

$s = \cos x$

$2.s^2 + 9.s + 4 = 0$

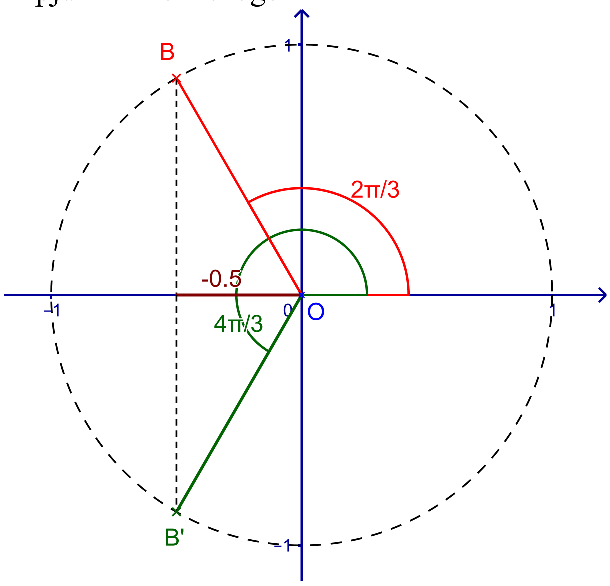
$$s_{1,2} = \frac{-9\pm\sqrt{9^2-4.2.4}}{2.2} = \frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{4} = \frac{-9\pm7}{4} = \begin{cases} \nearrow \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ \searrow \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

$-\frac{1}{2} = \cos x$ | $-4 = \cos x$

$x = \text{arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ | $x = \text{arc}\cos(-4) = \cos^{-1}(-4)$

$x = \frac{2}{3}\pi$ rad | a -4 a koszinusz értékkészletén kívül esik

egységkör segítségével kapjuk a másik szöget



$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ | $\cos x = \cos\frac{4\pi}{3}$

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ | $x_2 = \frac{4\pi}{3} + k.2\pi$ | $k \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 120° + k.360°$ | $x_2 = 240° + k.360°$ | $k \in \mathbb{Z}$

A legnehezebb típusa a trigonometrikus egyenleteknek csak szinusz és a koszinusz függvényeket tartalmazza de lineáris formában. Így az alapvető összefüggést nem tudjuk kihasználni.
Az egyszerűbb verziójában a szögfüggvények együtthatói azonosak. Így az egyenlet négyzetre emelésével az ilyet még meg lehet oldani. Csak ne feledjük, hogy a négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás (olyan megoldások is lehetnek, melyek az eredi egyenletnek nem megoldásai) – ellenőrzést kell végrehajtani.

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $\cos\alpha = \sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

előbb rendezzük az egyenletet, hogy egy oldalra kerüljenek a szögfüggvények a másikra pedig a szám

$\cos\alpha = \sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$ /-sin α

most már négyzetre emelhetjük

$\cos\alpha - \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $/()^2$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\cos^2\alpha - 2.\cos\alpha.\sin\alpha + \sin^2\alpha = \frac{2}{4}$

alkalmazzuk az alapvető összefüggést: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 - 2.\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $/-\frac{1}{2} + 2.\cos\alpha.\sin\alpha$

$\frac{1}{2} = 2.\cos\alpha.\sin\alpha$

kihasználjuk a kétszeres szög képletét: $\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$

$$\frac{1}{2} = \sin 2\alpha$$

$\sin 2\alpha = \sin 30°$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = \sin 150°$

$2\alpha = 30° + k.360°$ $\qquad$ $2\alpha = 150° + k.360°$

$\alpha = 15° + k.180°$ $\qquad$ $\alpha = 75° + k.180°$

kiszámoljuk az első kettőt (tulajdonképpen négy) szöget a $k = 0$ és 1-re – utána ellenőrizzük

$\alpha_1 = 15°$ $\qquad$ $\alpha_2 = 195°$ $\qquad$ $\alpha_3 = 75°$ $\qquad$ $\alpha_4 = 255°$

$$\cos 15° = \sin 15° - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4}$$
$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \neq \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$$

vagyis az $\alpha_1 = 15°$ nem megoldása

$$\cos 195° = \sin 195° - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4}$$
$$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

vagyis az $\alpha_2 = 195°$ megoldása

$$\cos 75° = \sin 75° - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4}$$
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

vagyis az $\alpha_3 = 75°$ megoldása

$$\cos 255° = \sin 255° - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{4}$$
$$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \neq \frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$$

vagyis az $\alpha_4 = 255°$ nem megoldása

$\alpha_1 = 75° + k.360°$ $\qquad$ $\alpha_2 = 195° + k.360°$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_1 = \frac{5\pi}{12} + k.2\pi$ $\qquad$ $\alpha_2 = \frac{13\pi}{12} + k.2\pi$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

A nehezebb változatban a szögfüggvények együtthatói különbözők.

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $7.\sin x + 5.\cos x = 6$.

alkalmazzuk a kétszeres szögek szögfüggvényére vonatkozó tételt illetve a szinusz és a koszinusz közötti alapösszefüggést

$$7.2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} + 5.\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 6\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$14.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} + 5.\cos^2\frac{x}{2} - 5.\sin^2\frac{x}{2} = 6.\sin^2\frac{x}{2} + 6.\cos^2\frac{x}{2} \qquad /:\cos^2\frac{x}{2}$$

$$14.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + 5 - 5.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 6.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 6$$

$$14.\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 5 - 5.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 6.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 6$$

$$0 = 11.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 14.\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1$$

$s = \text{tg}\,\frac{x}{2}$

$0 = 11.s^2 - 14.s + 1$

$s_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4.11.1)}}{2.11} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 44}}{22} = \frac{14 \pm \sqrt{152}}{22} = \begin{matrix} \nearrow 1{,}196\,76 \\ \searrow 0{,}075\,96 \end{matrix}$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{14+\sqrt{152}}{22} \;\longrightarrow\; \frac{x}{2} = \tan^{-1}\frac{14+\sqrt{152}}{22} = 0{,}874\,73 \text{ rad} + k.\pi$

$x_1 = 1{,}749\,46 + k.2\pi$

$x_1 = 100°14'12'' + k.360°$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{14-\sqrt{152}}{22} \;\longrightarrow\; \frac{x}{2} = \tan^{-1}\frac{14-\sqrt{152}}{22} = 0{,}075\,82 \text{ rad} + k.\pi$

$x_2 = 0{,}151\,63 + k.2\pi$

$x_2 = 8°41'17'' + k.360°$

Oldjuk meg az egyenletet: 3.sin α – 4.cos α = 2.

alkalmazzuk az addíciós tételt (szögek különbségének a szinusza) – de előbb az egyenletet el kell osztanunk egy nullától különböző a számmal, mivel a szinusz és a koszinusz a ⟨-1; 1⟩ intervallumból veszi fel az értékeket

$\frac{3}{a}.\sin\alpha - \frac{4}{a}.\cos\alpha = \frac{2}{a}$

$\cos\beta = \frac{3}{a} \;\wedge\; \sin\beta = \frac{4}{a}$

$\cos\beta.\sin\alpha - \sin\beta.\cos\alpha = \frac{2}{a}$

$\sin(\alpha - \beta) = \frac{2}{a}$

$\text{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{4}{a}}{\frac{3}{a}} = \frac{4}{3} = 1{,}333 \;\longrightarrow\; \beta = \tan^{-1} 1{,}333 = 53°7'48''$

$\sin\beta = \frac{4}{a} \;\longrightarrow\; a = \frac{4}{\sin 53°7'48''} = 5$

$\sin(\alpha - 53°7'48'') = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\sin(\alpha - 53°7'48'') = 0{,}4 \;\longrightarrow\; \sin^{-1} 0{,}4 = 23°34'41''$

$\alpha - 53°7'48'' = 23°34'41'' + k.360°$ $\qquad$ $\alpha - 53°7'48'' = 156°25'19'' + k.360°$

$\alpha_1 = 76°42'30'' + k.360°$ $\qquad$ $\alpha_2 = 209°33'7'' + k.360°$