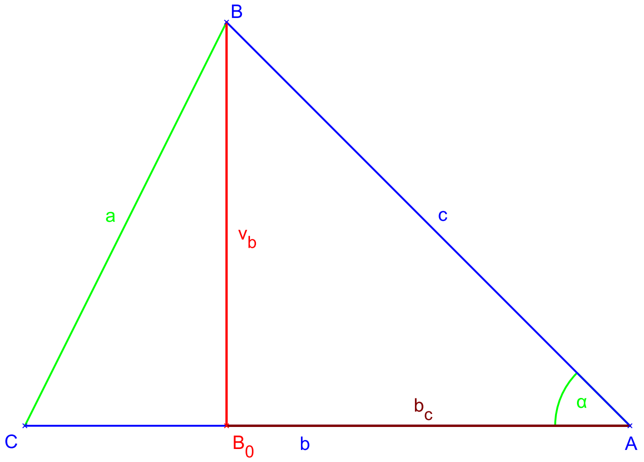
A koszinusztétel
(Kosínusová veta)

Rajzoljunk bele az általános háromszögbe egy magasságvonalat (v_b) majd az így keletkezett két derékszögű háromszögben (BCB_0 és ABB_0) alkalmazzuk a Pitagorasz tételt. Mivel a magasságvonalat szeretnénk eliminálni (eltávolítani), így mindkét egyenletből ezt fejezzük ki.



$a^2 = v_b^2 + (b - b_c)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - (b - b_c)^2 = v_b^2$

$c^2 = v_b^2 + b_c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - b_c^2 = v_b^2$

ezek után írhatjuk a bal oldalak egyenlőségét

$a^2 - (b - b_c)^2 = c^2 - b_c^2$

a zárójel felbontása után kifejezzük az a^2-et

$a^2 - (b^2 - 2.b.b_c + b_c^2) = c^2 - b_c^2$

$a^2 - b^2 + 2bb_c - b_c^2 = c^2 - b_c^2$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bb_c$

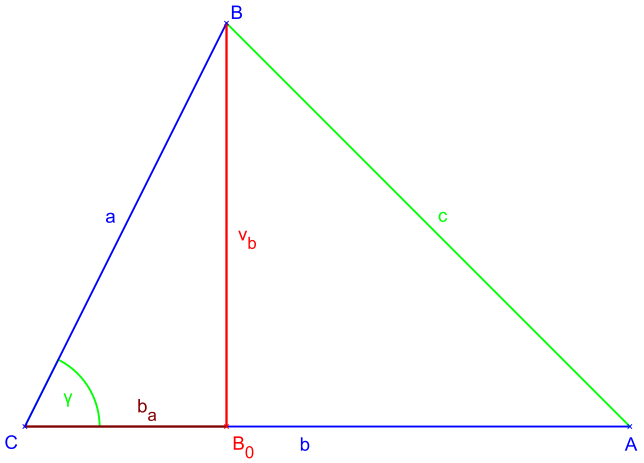
még a b_c-t kell eltünntetnünk a kifejezésből → ezért az ABB_0 háromszögben a koszinusz szögfüggvényt használjuk

$\cos\alpha = \frac{b_c}{c} \quad \rightarrow \quad c.\cos\alpha = b_c$

behelyettesítés és rendezés után megkapjuk a koszinusztétel végső alakját

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

Ha a háromszög ugyanilyen v_b magasságvonallal történő felbontása mellett ugyanazokat a lépéseket hajtjuk végre csak az ellenkező háromszögekben, akkor megkapjuk a koszinusztételt egy másik oldalra – a c- oldalra.



$a^2 = v_b^2 + b_a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - b_a^2 = v_b^2$

$c^2 = v_b^2 + (b - b_a)^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - (b - b_a)^2 = v_b^2$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - (b - b_a)^2$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - (b^2 - 2.b.b_a + b_a^2)$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - b^2 + 2bb_a - b_a^2$

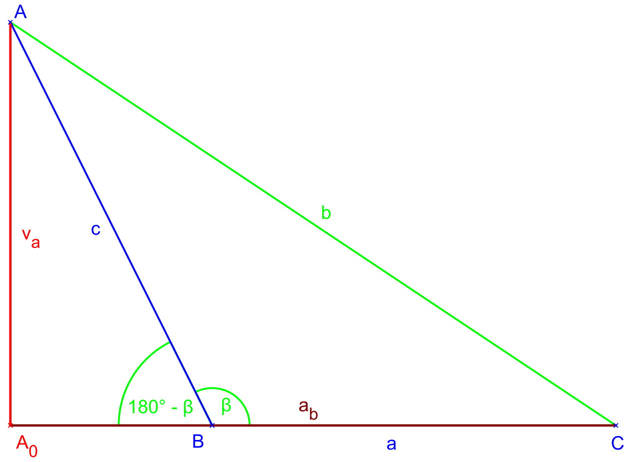
$a^2 + b^2 - 2bb_a = c^2$

$\cos \gamma = \frac{b_a}{a} \quad \rightarrow \quad a.\cos \gamma = b_a$

behelyettesítés és rendezés után megkapjuk a koszinusztétel végső alakját

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$

A koszinusztételt a harmadik oldalra egy másik magasságvonal berajzolásával kapjuk (v_a vagy v_c). Próbáljuk ezt most bizonyítani egy tompaszögű háromszögben, ahol ez a magasságvonal a háromszögön kívül halad. Vajon ekkor is érvényes a koszinusztétel?



$b^2 = v_a^2 + a_b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 - a_b^2 = v_a^2$

$c^2 = v_a^2 + (a_b - a)^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - (a_b - a)^2 = v_a^2$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - (a_b - a)^2$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - (a_b^2 - 2.a_b.a + a^2)$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - a_b^2 + 2a_b a - a^2$

$b^2 = c^2 - a^2 + 2a_b a$

$\cos(180° - \beta) = \frac{a_b - a}{c} \quad \rightarrow \quad c.\cos(180° - \beta) = a_b - a$

alkalmazva az összefüggést: cos (180° – x) = -cos x

$c.(-\cos \beta) = a_b - a \quad \rightarrow \quad a - c.\cos \beta = a_b$

$b^2 = c^2 - a^2 + 2(a - c.\cos \beta)a = c^2 - a^2 + 2a^2 - 2ac.\cos \beta = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$

T. A háromszög egyik oldalára szerkesztett négyzet területe megegyezik a másik kettőre (második és harmadik oldal) szerkesztett négyzetek területeinek összegével, melyből levonjuk annak a téglalap területének a kétszeresét, melynek egyik oldala a háromszög második oldala, a másik pedig a harmadik oldal merőleges vetülete a második oldal tartóegyenesén.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$

M. Ezt a tételt használjuk akkor is, mikor ismert a háromszög mindhárom oldala, és az első belső szögét szeretnénk kiszámolni. A második szöget már általában a szinusztétellel oldjuk – egyszerűbb számítás. Alakítsuk át a tételeket kifejezve a szögeket – tulajdonképpen a szögek koszinuszait.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha \qquad / - b^2 - c^2$

$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc.\cos \alpha \qquad /:(-2bc)$

$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \alpha$

$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Analóg módon kapjuk a többi szögre is.

T.

$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

példa:

Oldjuk meg az ABC háromszöget, ha adottak: a = 60; b = 42; α = 44°25'

ismert egy szemben lévő elempár ⇒ szinusztétellel oldjuk

először a β szöget számoljuk ki, ezért a szinusztétel reciprok alakját alkalmazzuk

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$

$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot b = \frac{\sin 44°25'}{60} \cdot 42 = 0{,}489\,9 \;\rightarrow\; \beta = \sin^{-1} 0{,}489\,9$

β = 29°20'5"

γ = 180° – (α + β) = 180° – 73°45'5"

γ = 106°14'55"

a hiányzó harmadik oldal kiszámításához újra a szinusztételt használjuk

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{60}{\sin 44°25'} \cdot \sin 106°14'55''$

c = 82,306

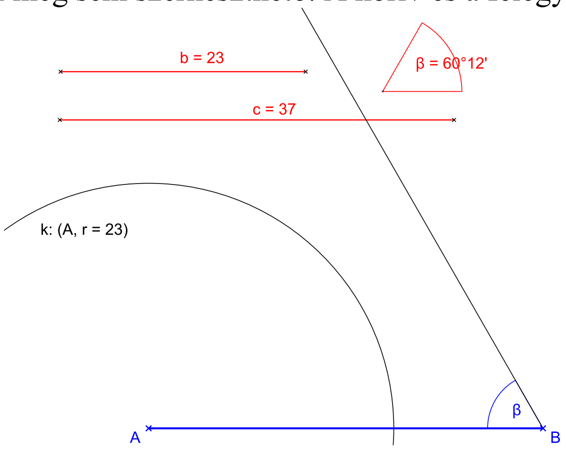
M. Azokat a törtpárokat alkalmazzuk, ahol minél több adott érték található és minél kevesebb általunk számított!
A harmadik oldalt számolhattuk volna az alábbi törtpárral is: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$. Viszont ebben két általunk számolt, kerekített érték szerepel – a β és a γ szögek. Az összefüggés, amellyel számoltunk, csak a γ számolt szöget tartalmazta, a többi pontos, adott érték volt.

Oldjuk meg az ABC háromszöget, ha adottak: b = 23; c = 37; β = 60°12'

$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$

$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b} \cdot c = \frac{\sin 60°12'}{23} \cdot 37 = 1{,}396\,0 \;\rightarrow$ nincs megoldása – a szinusz értékek a ⟨-1; 1⟩ intervallumból vannak

M. A háromszög ezen adatokkal meg sem szerkeszthető. A körív és a félegyenes nem metszi egymást.



Oldjuk meg az ABC háromszöget, ha adottak: c = 100; α = 64°; β = 42°

először kiszámoljuk a harmadik szöget, majd szinusztétellel folytatjuk

γ = 180° – (α + β) = 180° – 106°

γ = 74°

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$a = \frac{c}{\sin\gamma} \cdot \sin\alpha = \frac{100}{\sin 74°} \cdot \sin 64°$

a = 93,501

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$b = \frac{c}{\sin\gamma} \cdot \sin\beta = \frac{100}{\sin 74°} \cdot \sin 42°$

b = 69,610

Oldjuk meg az ABC háromszöget, ha adottak: $a = 13$; $b = 7$; $\gamma = 36°$

adott két oldal és az általuk bezárt szög ⇒ koszinusztétellel számítjuk ki a hiányzó oldalt

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma = 13^2 + 7^2 - 2.13.7.\cos 36° = 169 + 49 - 182.0{,}809\,0 = 218 - 147{,}241 = 70{,}759$

M. Az egyedüli hiba, amit elkövethetünk, ha összevonjuk a harmadik számot az előtte lévőkkel mielőtt beszoroznánk a koszinusszal: $169 + 49 - 182.0{,}809\,0 \neq 36.0{,}809\,0 = 29{,}125$

$c = 8{,}412$

a következő szöget már szinusztétellel számoljuk

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}.a = \frac{\sin 36°}{8{,}412}.13 = 0{,}908\,4 \rightarrow \alpha = \sin^{-1} 0{,}908\,4$

$\alpha = 65°17'1''$

a harmadik pedig a 180°-hoz hiányzó szög

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - 101°17'1''$

$\beta = 78°42'59''$

M. Az, aki a matematikai példák eredményei felett egy kicsit sem gondolkodik el, hogy egyáltalán lehet-e az az eredmény megoldása a feladatnak vagy sem, és automatikusan aláhúzza a kapott eredményt, sajnos itt hibát követ el – a három kiszámolt eredményből csak a c oldal helyes.
Van egy tétel, mely kimondja, hogy egy ***háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb belső szög található***. Nézzük csak meg jobban az előző példánkat: az a oldal hossza 13 – az $\alpha = 65°17'1''$; a b oldal pedig 7 – a $\beta = 78°42'59''$. Vagyis ezek a szögek rosszul vannak kiszámolva.
Hol és miben hibáztunk? Miért kaptunk helytelen szöget? És főképp, hogy kerülhetjük el az ilyen hibákat?

Erről a szinusz függvény „tehet". A függvény pozitív értékeket vesz fel úgy a hegyesszögekre: a (0; 90°) intervallum, mint a tompaszögekre: a (90°; 180°) intervallum. A számológép mindig a nullához legközelebbi szöget adja vissza a szinusz értékéből. Vagyis ha háromszögünk tompaszögű is, a számológépünk hegyesszögűt csinál belőle, ha szinusztétellel számoljuk pont a tompaszöget.
Hogy kerülhetjük ezt ki? Egyszerűen azt a szöget kell számolnunk, amelyik biztosan nem lehet tompaszög. Mivel egy háromszögön belül csak egy tompaszög lehet (ha több lenne, összegük túllépné a 180°-ot), **szinusztétellel a rövidebb oldallal szemközti szöget kell számolni!**

számoljuk újra

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c}.b = \frac{\sin 36°}{8{,}412}.7 = 0{,}489\,1 \rightarrow \beta = \sin^{-1} 0{,}489$

$\beta = 29°17'1''$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 65°17'1''$

$\alpha = 114°42'59''$

és ezek az eredmények már helyesek

Az ABC háromszögben adottak oldalainak hosszai: $a = 20$; $b = 40$; $c = 28$. Határozzuk meg belső szögei nagyságát.

M. Ha nem szeretnénk hasonló hibát elkövetni, mint az előző példában, akkor az **első**, koszinusztétellel számolt szögként **a legnagyobbat** válasszuk. Azért, mert a tompaszögek koszinusz értékei negatívak. Vagyis ha háromszögünk véletlenül tompaszögű, máris rájövünk, ha **a leghosszabb oldallal szemközti szöget** számoljuk – fenti példánkban ez a β szög.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$40^2 = 20^2 + 28^2 - 2.20.28.\cos\beta$$
$$1\,600 = 400 + 784 - 1\,120.\cos\beta$$
$$1\,600 = 1\,184 - 1\,120.\cos\beta \qquad /-1\,184$$
$$416 = -1\,120.\cos\beta \qquad /:(1\,120)$$
$$-0{,}371\,4 = \cos\beta$$
$$\beta = \cos^{-1}(-0{,}371\,4)$$
$$\beta = 111°48'13''$$

ezek után már mindegy, hogy szinusztétellel melyik szöggel folytatjuk

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$

$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{b} . a = \frac{\sin 111°48'13''}{40} . 20 = 0{,}464\,2 \;\rightarrow\; \alpha = \sin^{-1} 0{,}464\,2$

$\alpha = 27°39'38''$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 139°27'51''$

$\gamma = 40°32'9''$