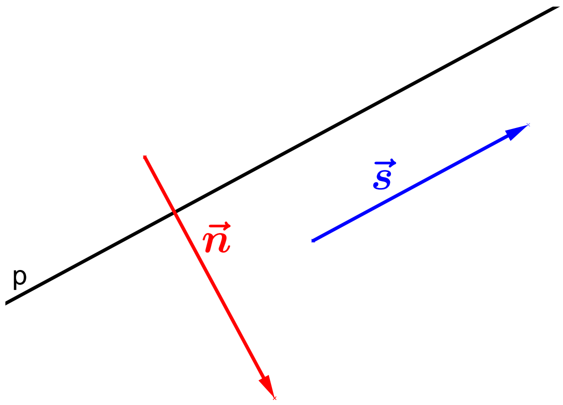
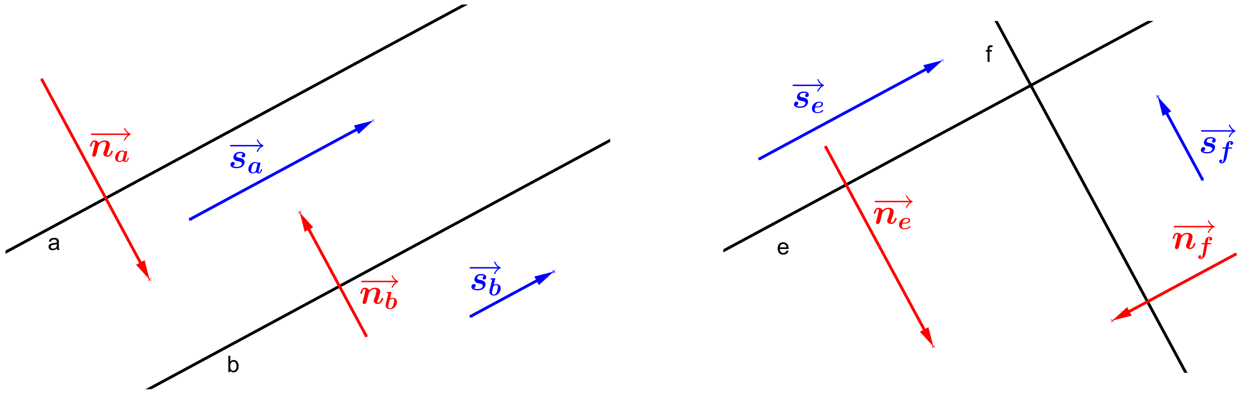
Az egyenes paraméteres egyenlete
(Parametrická rovnica priamky)

D. ***Az egyenes irányvektora*** (smerový vektor priamky) egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos nemnullvektor (végtelen sok ilyen létezik – ezek kölcsönösen párhuzamosak ⇒ irányuk kétféle lehet; egyedül nagyágukban különböznek) – $\vec{s}\,(s_1; s_2)$.

D. ***Az egyenes normálvektora*** (normálový vektor priamky) egy tetszőleges, az egyenesre merőleges nemnullvektor (szintén végtelen sok ilyen található) – $\vec{n}\,(n_1; n_2)$.



Az ábrákon láthatjuk, milyen kölcsönös helyzetet vesz fel az irány- és a normálvektor párhuzamos illetve merőleges egyenesek esetében.



T.

$$a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{s_a} \parallel \overrightarrow{s_b} \\ \overrightarrow{n_a} \parallel \overrightarrow{n_b} \\ \\ \overrightarrow{s_a} \perp \overrightarrow{n_b} \\ \overrightarrow{n_a} \perp \overrightarrow{s_b} \end{cases} \qquad e \perp f \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{s_e} \perp \overrightarrow{s_f} \\ \overrightarrow{n_e} \perp \overrightarrow{n_f} \\ \\ \overrightarrow{s_e} \parallel \overrightarrow{n_f} \\ \overrightarrow{n_e} \parallel \overrightarrow{s_f} \end{cases}$$

A klasszikus euklideszi geometriából tudjuk, hogy egy egenest több módon is megadhatunk – az egyik axióma szerint két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest. A többi lehetőség ebből az axiómából van levezetve:

- egy pont és egy vele párhuzamos egyenes
- egy pont és egy rá merőleges egyenes

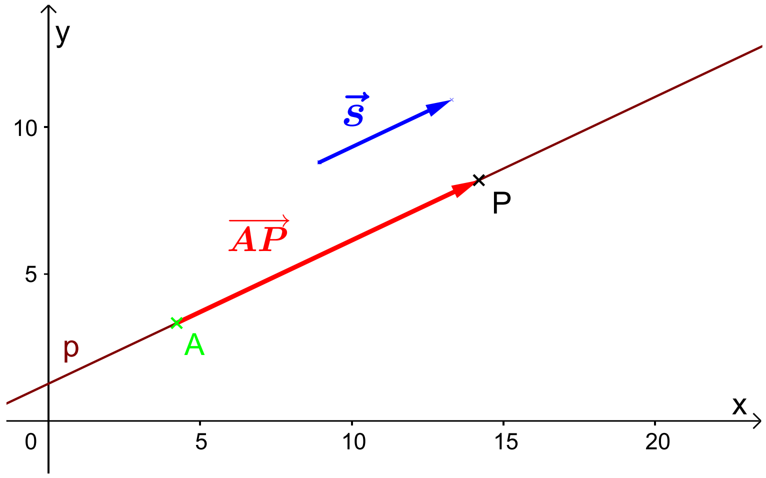
Koordinátageometriában az egyenesek egyenletei az egyenes egy vektorával (irány- vagy normálvektor) és az egyenes egy pontjával (néha a vektor helyett az egyenes egy másik pontja ismert – a pontokból meghatározható az gyenes irányvektora) adottak.

Ahhoz, hogy felírjuk az egyenes paraméteres egyenletét, ismernünk kell az egyenes irányvektorát és az egyenes egy pontját.

Adott a p egyenes $\overrightarrow{s_p}$ irányvektorával és A pontjával:

$\overrightarrow{s_p}\,(s_1; s_2)$, $A(x_0; y_0)$

Ábrázoljuk egyenesünket a koordinátarendszerben. Vegynük fel egy további pontot az egyenesen – egy általános P(x; y) pontot.



Alkalmazzuk a vertorok párhuzamosságát – pontosan akkor párhuzamosak, ha az egyik a másik számszorosa. Így az $\overrightarrow{AP}$ vektort kifejezzük, mint az $\overrightarrow{s_p}$ irányvektor t-szerese:

$\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{s_p}$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

meghatározzuk az $\overrightarrow{AP}$ vektor koordinátáit – végpont mínusz kezdőpont:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x; y) - (x_0; y_0) = (x - x_0; y - y_0)$

behelyettesítünk:

$(x - x_0; y - y_0) = t.(s_1; s_2)$

$(x - x_0; y - y_0) = (t.s_1; t.s_2)$

két vektor éppen akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátái megegyeznek – egyenletrendszert kapunk:

$x - x_0 = t.s_1$

$y - y_0 = t.s_2$

már csak az általános P pont koordinátáit kell kifejezni – átvisszük az ismert A pont koordinátáit a jobboldalra

$x = t.s_1 + x_0$

$y = t.s_2 + y_0$

A p egyenes paraméteres egyenlete az alábbi alakot ölti:

$p: x = x_0 + s_1.t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$y = y_0 + s_2.t$

egyesített alak (vektoros alak):

$p: P = A + t.\overrightarrow{s_p}$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

M. Az egyenletben szereplő t számot paraméternek nevezzük – ez alapján nevezték el az egyenletet. Ha konkrét számot helyettesítün be, akkor az egyenes egy pontját kapjuk. A t = 0 helyettesítésre azt az A pontot kapjuk, melyet az egyenlethez használtunk.

példa:

Adott egy egyenes $\vec{s}$ irányvektorával és egy pontjával. Írjuk fel az egyenes paraméteres egyenletét!

a, a: $\overrightarrow{s_a} = (-3; 5)$; A = (4; 2) $\qquad$ b, b: $\overrightarrow{s_b} = (1; -2)$; B = (-3; 7)

c, c: $\overrightarrow{s_c} = (0; 4)$; C = (1; 6) $\qquad$ d, d: $\overrightarrow{s_d} = (5; 3)$; D = (2; 0)

a: $x = 4 - 3.t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$y = 2 + 5.t$

b: $x = -3 + t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$y = 7 - 2t$

c: $x = 1$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$y = 6 + 4t$

d: $x = 2 + 5t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$y = 3t$

Adott egy egyenes két pontjával. Írjuk fel a paraméteres egyenletét!

a, a: A(-2; 7), B(3; 4)   b, b: C(5; -3), D(-1; -2)

c, c: E(10; 11), F(14; 6)   d, d: G(3; 2), H(1; -4)

az egyenes pontjaiból felírjuk az egyenes irányvektorát

$\vec{s_a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5; -3)$

a két pont bármelyikét használhatjuk a paraméteres egyenletben → két különböző alak

$a: \begin{aligned} x &= -2 + 5t \\ y &= 7 - 3t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$ vagy $a: \begin{aligned} x &= 3 + 5t \\ y &= 4 - 3t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_b} = \overrightarrow{CD} = D - C = (-6; 1)$

$b: \begin{aligned} x &= 5 - 6t \\ y &= -3 + t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$ vagy $b: \begin{aligned} x &= -1 - 6t \\ y &= -2 + t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_c} = \overrightarrow{EF} = F - E = (4; -5)$

$c: \begin{aligned} x &= 10 + 4t \\ y &= 11 - 5t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_d} = \overrightarrow{GH} = H - G = (-2; -6) \sim (1; 3)$

a koordinátákat elosztottuk – rövidebb, ellentett irányú vektort használunk (párhuzamos az eredeivel)

$d: \begin{aligned} x &= 3 + t \\ y &= 2 + 3t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

Adott egy egyenes paraméteres egyenletével. Határozzuk meg az egyenes irányvektorát és egy pontját!

a, $a: \begin{aligned} x &= -2 + 4t \\ y &= 1 - 3t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$ b, $b: \begin{aligned} x &= 5t \\ y &= -4 + 6t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

c, $c: \begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 7 \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$ d, $d: \begin{aligned} x &= 5 + 3t \\ y &= -1 + 5t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_a} = (4; -3)$; A = (-2; 1)

$\vec{s_b}(5; 6)$; B(0; -4)

$\vec{s_c}(-2; 0)$; C(3; 7)

$\vec{s_d}(3; 5)$; D(5; -1)

Határozzuk meg a p egyenes t paraméterhez tartozó pontjának koordinátáit!

$p: \begin{aligned} x &= 4 + 3t \\ y &= -2 - 7t \end{aligned}$

a, t = 0   b, t = 1   c, t = 4   d, t = -2

a paramétert behelyettesítjük az egyenletbe, így számoljuk ki a koordinátákat

x = 4 + 3.0 = 4

y = -2 – 7.0 = -2

A(4; -2)

x = 4 + 3.1 = 4 + 3 = 7

y = -2 – 7.1 = -2 – 7 = -9

B(7; -9)

x = 4 + 3.4 = 4 + 12 = 16

y = -2 – 7.4 = -2 – 28 = -30

C(16; -30)

x = 4 + 3.(-2) = 4 – 6 = -2

y = -2 – 7.(-2) = -2 + 14 = 12

D(-2; 12)

Adott az e egyenes paraméteres egyenletével. Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az egyeneshez?

$e: \begin{aligned} x &= -3 + t \\ y &= 7 - 2t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$

A(-3; 7) B(3; 6) C(0; 1) D(-7; 15) E(1; -3)

-3 = -3 + t /+3
7 = 7 – 2t /-7
0 = t
0 = -2t /:(-2)

$\left.\begin{array}{r} 0 = t \\ 0 = t \end{array}\right\}$ azonos t értéket kaptunk ⇒ $A \in e$

3 = -3 + t /+3
6 = 7 – 2t /-7
6 = t
-1 = -2t /:(-2)

$\left.\begin{array}{r} 6 = t \\ \frac{1}{2} = t \end{array}\right\}$ különböző t értéket kaptunk ⇒ $B \notin e$

0 = -3 + t /+3
1 = 7 – 2t /-7
3 = t
-6 = -2t /:(-2)

$\left.\begin{array}{r} 3 = t \\ 3 = t \end{array}\right\}$ azonos t értéket kaptunk ⇒ $C \in e$

-7 = -3 + t /+3
15 = 7 – 2t /-7
-4 = t
8 = -2t /:(-2)

$\left.\begin{array}{r} -4 = t \\ -4 = t \end{array}\right\}$ azonos t értéket kaptunk ⇒ $D \in e$

1 = -3 + t /+3
-3 = 7 – 2t /-7
4 = t
-10 = -2t /:(-2)

$\left.\begin{array}{r} 4 = t \\ 5 = t \end{array}\right\}$ különböző t értéket kaptunk ⇒ $E \notin e$

Határozzuk meg a pont hiányzó koordinátáját úgy, hogy illeszkedjen az egyeneshez!

a, $A(x_A; 2)$, a: $\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = 3 + t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

b, $B(x_B; -14)$, b: $\begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = -4 + 5t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

c, $C(-4; y_C)$, c: $\begin{array}{l} x = 5 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

d, $D(7; y_C)$, d: $\begin{array}{l} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 7t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

az adott koordinátát behelyettesítjük az egyenletbe → kiszámítjuk a paramétert → a paramétert behelyettesítjük a másik egyenletbe, és így megkapjuk a pont másik, hiányzó koordinátáját

2 = 3 + t /-3
-1 = t
x = 4 – 2.(-1) = 4 + 2 = 6

A(6; 2)

-14 = -4 + 5t /+4
-10 = 5t /:5
-2 = t
x = 1 – 3.(-2) = 1 + 6 = 7

B(7; -14)

-4 = 5 + 3t /-5

-9 = 3t /:3

<u>-3 = t</u>

y = 2 + 4.(-3) = 2 – 12 = -10

C(-4; -10)

7 = 5 + 2t /-5

2 = 2t /:2

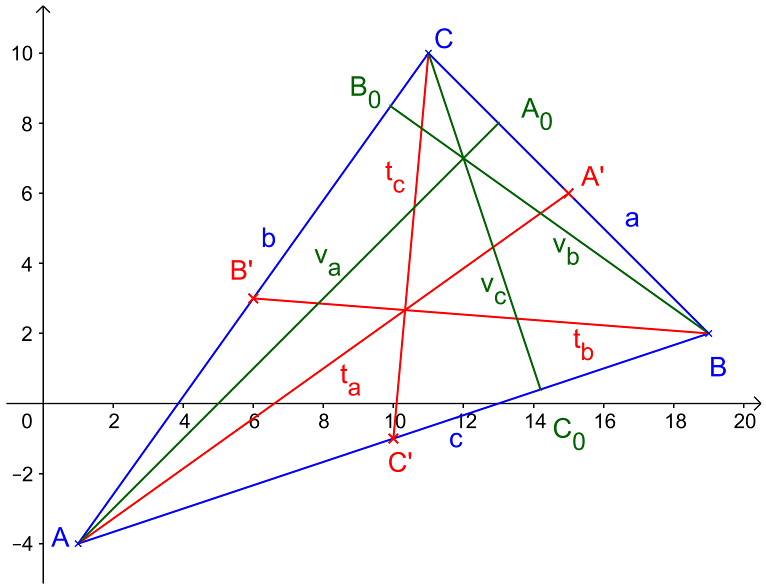
<u>1 = t</u>

y = -1 – 7.1 = -1 – 7 = -8

D(7; -8)

Adott az ABC háromszög. Írjuk fel oldalai, súlyvonalai és magasságvonalai paraméteres egyenletét!

A(1; -4), B(19; 2), C(11; 10)



a: BC

$\vec{s_a} = \overrightarrow{BC}$ = C – B = (-8; 8) ~ (-1; 1)

B ∈ a

$a: \begin{array}{l} x = 19 - t \\ y = 2 + t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

b: AC

$\vec{s_b} = \overrightarrow{AC}$ = C – A = (10; 14) ~ (5; 7)

A ∈ b

$b: \begin{array}{l} x = 1 + 5t \\ y = -4 + 7t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

c: AB

$\vec{s_c} = \overrightarrow{AB}$ = B – A = (18; 6) ~ (3; 1)

A ∈ c

$c: \begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = -4 + t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

t_a: AA'

$A' = \frac{B+C}{2}$ = (15; 6)

$\vec{s_{t_a}} = \overrightarrow{AA'}$ = A' – A = (14; 10) ~ (7; 5)

A ∈ t_a

$t_a: \begin{array}{l} x = 1 + 7t \\ y = -4 + 5t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$

t_b: BB'

$B' = \frac{A+C}{2}$ = (6; 3)

$\overrightarrow{s_{t_b}} = \overrightarrow{BB'} = B' - B = (-13; 1)$

$B' \in t_b$

t_b: $x = 6 - 13t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = 3 + t$

t_c: CC'

$C' = \frac{A+B}{2} = (10; -1)$

$\overrightarrow{s_{t_c}} = \overrightarrow{CC'} = C' - C = (-1; -11)$

$C' \in t_c$

t_c: $x = 10 - t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = -1 - 11t$

v_a: AA_0

$\overrightarrow{s_{v_a}} \perp \overrightarrow{s_a} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_a}} = (1; 1)$

$A \in v_a$

v_a: $x = 1 + t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = -4 + t$

v_b: BB_0

$\overrightarrow{s_{v_b}} \perp \overrightarrow{s_b} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_b}} = (7; -5)$

$B \in v_b$

v_b: $x = 19 + 7t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = 2 - 5t$

v_c: CC_0

$\overrightarrow{s_{v_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_c}} = (1; -3)$

$C \in v_c$

v_c: $x = 11 + t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = 10 - 3t$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenessel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletét:

a, A(3; -2), a: $x = 7 + t$
$y = 6 - 5t$

b, B(6; 5), b: $x = -2 + 7t$
$y = -3 + 4t$

- párhuzamos egyenesek irányvektorai is párhuzamosak ⇒ lehetnek azonosak is
- így a párhuzamos egyenesek paraméteres egyenletei különbözhetnek csak a számokban (a t paraméter nélküli) – az egyenletben felhasznált pont koordinátái
- különbözhetnek az irányvektorban is (a t paraméter együtthatóiban) – az egyik irányvektor a másik számszorosa

r_a: $x = 3 + t$
$y = -2 - 5t$

r_b: $x = 6 + 7t$
$y = 5 + 4t$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenesre merőleges egyenes paraméteres egyenletét:

a, C(-4; 7), c: $x = 3 + 9t$
$y = -1 + 2t$

b, D(1; 2), d: $x = -2 - 5t$
$y = -3 + 4t$

- merőleges egyenesek irányvektorai is merőlegesek

$\overrightarrow{s_c} = (9; 2)$

$\overrightarrow{s_{k_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{k_c}} = (2; -9)$

k_c: $x = -4 + 2t$
$y = 7 - 9t$

$\overrightarrow{s_d} = (-5; 4)$

$\overrightarrow{s_{k_d}} \perp \overrightarrow{s_d} \Rightarrow \overrightarrow{s_{k_d}} = (4; 5)$

$k_d : x = 1 + 4t$
$\quad\;\; y = 2 + 5t$