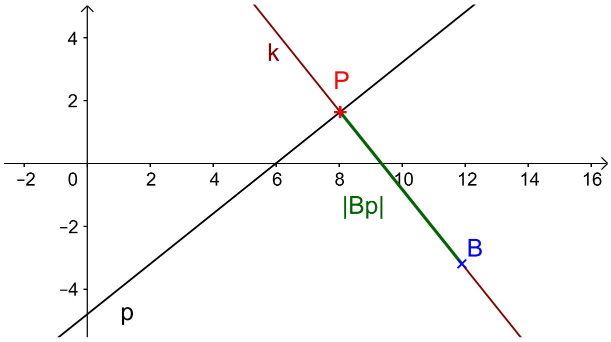
Pont és egyenes távolsága
(Vzdialenosť bodu od priamky)

Adott egy egyenes (p) és rajta kívül egy pont (B). Meg kell határoznunk a távolságukat.
Hagyományosan (szerkesztéssel) a pontból merőlegest húznánk az egyenesre. Így a keresett távolság azonos az adott pont és az egyenesek metszéspontjának (P) távolságával.



Próbáljuk meg ugyanezt a koordinátageometriában. Adott az egyenes egyenletével a pont pedig koordinátáival:
p: $y = \frac{3}{4}x + 5$; $B = (3; 7)$.

az első lépés a merőleges egyenes egyenlete

a p egyenes iránytényezős egyenletéből leolvashatjuk az iránytényezőt:

$k_p = \frac{3}{4}$

$k \perp p \Rightarrow k_k = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

k: $y = -\frac{4}{3}x + b$

$B \in k \Rightarrow 7 = -\frac{4}{3}.3 + b$

$7 = -4 + b$

$11 = b$

k: $y = -\frac{4}{3}x + 11$

a következő lépés az egyenesek metszéspontjának a meghatározása

$y = \frac{3}{4}x + 5$

$y = -\frac{4}{3}x + 11$

$\frac{3}{4}x + 5 = -\frac{4}{3}x + 11$ /.12

$9x + 60 = -16x + 132$ /+16x – 60

$25x = 72$ /:25

$x = \frac{72}{25} = 2{,}88$

$y = \frac{3}{4}.\frac{72}{25} + 5 = \frac{54}{25} + 5 = \frac{179}{25} = 7{,}16$

az utolsó lépés pedig az pontok távolságának a kiszámítása

$$|Bp| = |BP| = \sqrt{\left(\frac{72}{25} - 3\right)^2 + \left(\frac{179}{25} - 7\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{625} + \frac{16}{625}} = \sqrt{\frac{25}{625}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Vagyis három lépésben kaptuk meg a keresett távolságot. Ha így kellene meghatároznunk a pont távolságát egy egyenestől, ez nagyon körülményes lenne. Szerencsénkre van erre egy összefüggés, amivel rögtön megkapjuk az eredményt.

Legyen adott az egyenes általános egyenletével és legyen adott egy pont.

p: $n_1.x + n_2.y + c = 0$; $B(x_B; y_B)$

Ekkor a távolságukat megkapjuk:

T. $|Bp| = \frac{|n_1.x_B + n_2.y_B + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$

M. Ha az egyenes más egyenletével adott, nem az általánossal (paraméteres, iránytényezős, …), akkor előbb át kell alakítani általánosra, mert a képlet csak általános egyenlettel működik.

Próbáljuk ki az összefüggést a bevezető példán: p: $y = \frac{3}{4}x + 5$; B = (3; 7)

az iránytényezős egyenletet átalakítjuk általánossá

$y = \frac{3}{4}x + 5$ /.4

$4y = 3x + 20$ /-4y

$0 = 3x - 4y + 20$

most már behelyettesíthetünk

$$|Bp| = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|3.3-4.7+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|9-28+20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

példa:

Adott az ABC háromszög. Határozzuk meg magasságainak nagyságát!

A(-4; 3), B(12; -7), C(8; 9)

(Ezt a példát oldottuk az egyenes általános egyenleténél – felhasználom a kapott eredményeket. Ha nem ismerném az oldalak általános egyenletét, akkor előbb ezeket is meg kellene határoznom.)

a: $4x + y - 41 = 0$

b: $x - 2y + 10 = 0$

c: $5x + 8y - 4 = 0$

$$v_a = |Aa| = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|4.(-4)+3-41|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|-16+3-41|}{\sqrt{16+1}} = \frac{|-54|}{\sqrt{17}} = \frac{54}{\sqrt{17}} = 13{,}097$$

$$v_b = |Bb| = \frac{|12-2.(-7)+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|12+14+10|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|36|}{\sqrt{5}} = \frac{36}{\sqrt{5}} = 16{,}100$$

$$v_c = |Cc| = \frac{|5.8+8.9-4|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{|40+72-4|}{\sqrt{25+64}} = \frac{|108|}{\sqrt{89}} = \frac{108}{\sqrt{89}} = 11{,}448$$

Ellenőrzésként a háromszög területének a kiszámítását vesszük alapul: a terület egyenlő az oldal szorozva magassággal törve kettővel. Ezért előbb az oldalak hosszát számoljuk ki.

$$a = |BC| = \sqrt{(8-12)^2 + \left(9-(-7)\right)^2} = \sqrt{16+256} = \sqrt{272} = 16{,}492$$

$$b = |AC| = \sqrt{\left(8-(-4)\right)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = 13{,}416$$

$$c = |AB| = \sqrt{\left(12-(-4)\right)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{256+100} = \sqrt{356} = 18{,}868$$

a területet kiszámolva

$$S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{16{,}492.13{,}097}{2} = 107{,}998$$

$$S = \frac{b.v_b}{2} = \frac{13{,}416.16{,}100}{2} = 107{,}999$$

$$S = \frac{c.v_c}{2} = \frac{18{,}868.11{,}448}{2} = 108{,}000$$

Határozzuk meg két párhuzamos egyenes távolságát: a: $2x - 3y + 7 = 0$; b: $y = \frac{2}{3}x + 5$.

először belátjuk, hogy valóban párhuzamosak

$$2x - 3.\left(\frac{2}{3}x + 5\right) + 7 = 0$$

$$2x - 2x - 15 + 7 = 0$$

$$-8 \neq 0 \Rightarrow \text{párhuzamosak}$$

az egyik egyenesen felveszünk egy pontot, majd meghatározzuk a távolságát a másik egyenestől

$B(3; y_B) = (3; 7)$

$y_B = \frac{2}{3}.3 + 5 = 2 + 5 = 7$

$$|ab| = |Ba| = = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|2.3-3.7+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|6-21+7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-8|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = 2{,}219$$