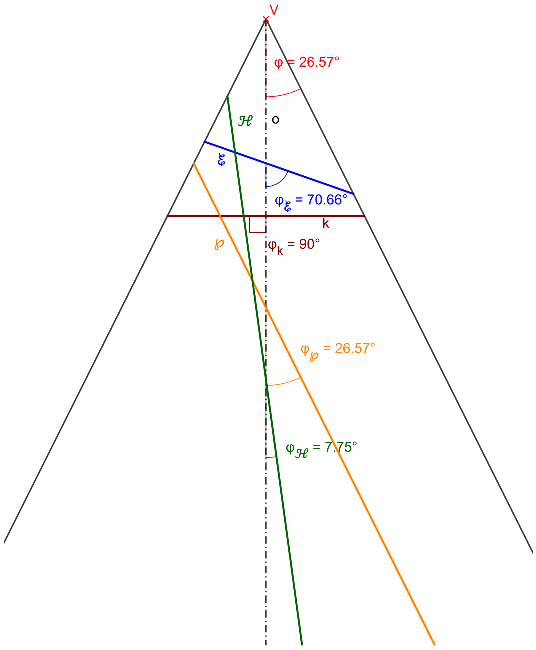
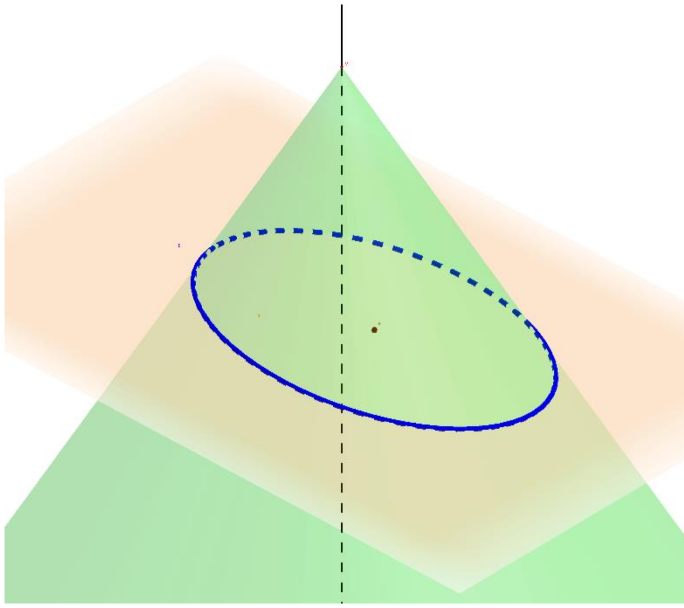
Az ellipszis
(Elipsa)

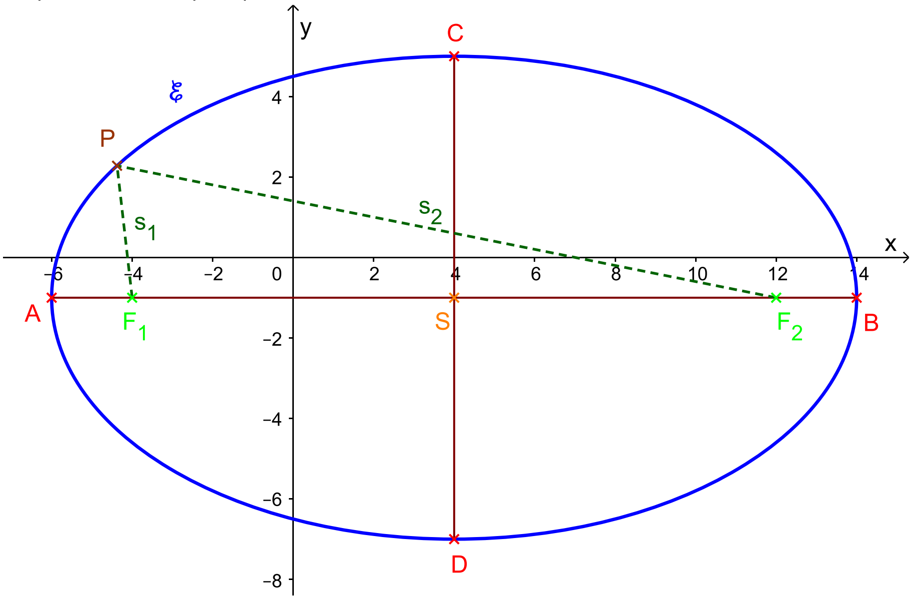
koordinátageometria: másodfokú (másodrendű) alakzat, másodfokú görbe
euklideszi geometria: kúpszelet (kúpfelület és sík metszésvonala) – mikor a sík nem párhuzamos a kúpfelület egyetlen alkotójával sem és nem merőleges a kúpfelület tengelyére



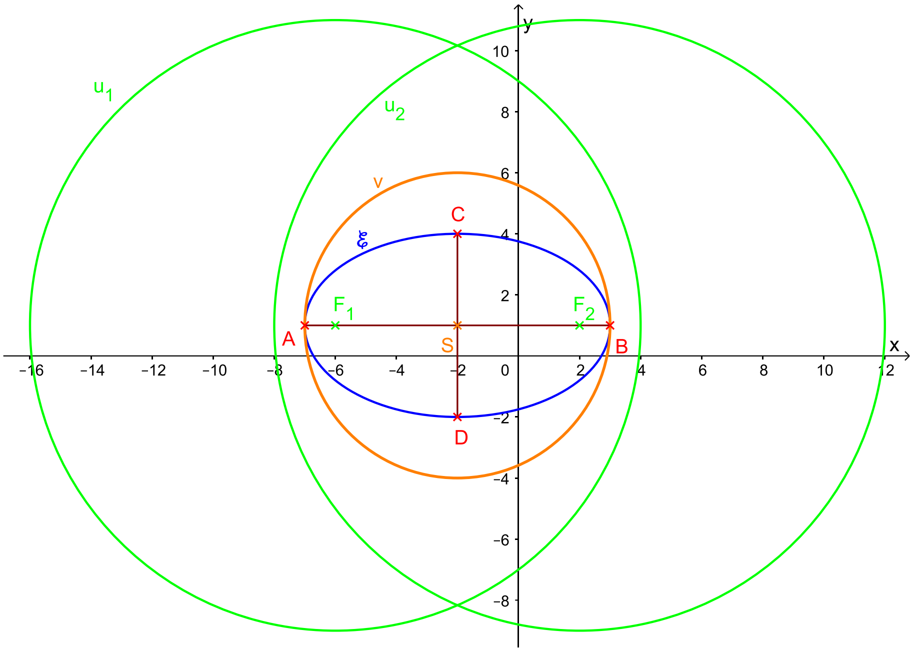


D. Az ***ellipszis*** a sík azon pontjainak halmaza, melyeknek két előre adott ponttól mért távolságainak összege állandó. Ez a két pont az ellipszis gyújtópontja, a konstans összeg pedig a nagytengely hossza.

$$|F_1P| + |F_2P| = s_1 + s_2 = |AB| = 2a$$



S – az $\mathcal{E}$ középpontja (stred)
A, B – az $\mathcal{E}$ csúcsai (hlavné vrcholy): A, B ∈ $\mathcal{E}$
C, D – az $\mathcal{E}$ csúcsai (vedľajšie vrcholy): C, D ∈ $\mathcal{E}$
F_1, F_2 – az $\mathcal{E}$ gyújtópontjai/fókuszai (ohniská)
AB – az $\mathcal{E}$ nagytengelye (hlavná os)
$|AB| = 2a$ – a nagytengely hossza (a – nagy féltengelye)
CD – az $\mathcal{E}$ kistengelye (vedľajšia os)
$|CD| = 2b$ – a kistengely hossza (b – kis féltengelye)
$|F_1S| = |SF_2| = e$ – lineáris excentricitás (ohnisková vzdialenosť, výstrednosť)
s_1; s_2 – a P pont vezérsugarai/rádiusz vektorok (sprievodiče)



v – főkör (vrcholová kružnica): v(S, r = a)
u – vezérkör (určujúca kružnica): $u_1(F_1, r = 2a)$; $u_2(F_2, r = 2a)$

T. $e^2 = a^2 - b^2$

$\mathscr{E}$: S(u; v); a; b – az ellipszis középponti egyenlete:

$\mathscr{E}$: $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ x (fekvő $\mathscr{E}$)

$\mathscr{E}$: $\frac{(y-v)^2}{a^2} + \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ y (álló $\mathscr{E}$)

eltávolítjuk a zárójeleket, mindent egy oldalra viszünk (redukáljuk az egyenletet), rendezzük → az ellipszis általános egyenlete:

$\mathscr{E}$: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$ $A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$

feltétel: $A.B > 0$ (az A és a B azonos előjelűek) ∧ $A \neq B$ (de különböző értékek) ∧
∧ $BC^2 + AD^2 - 4ABE > 0$

az ellipszis paraméteres egyenlete:

$\mathscr{E}$: $x = a.\cos\varphi$; $y = b.\sin\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

pontjainak koordinátái:

AB ∥ x:

A($u - a$; v)	C(u ; $v + b$)	$F_1(u - e; v)$
B($u + a$; v)	D(u ; $v - b$)	$F_2(u + e; v)$

AB ∥ y:

A(u; $v - a$)	C($u - b$; v)	$F_1(u; v - e)$
B(u; $v + a$)	D($u + b$; v)	$F_2(u; v + e)$

példa:

Írjuk fel az ellipszis általános egyenletét, ha ismertek: a = 12, b = 9, S(-3; 2), AB ∥ x

behelyettesítünk az adatokat a középponti egyenletbe

$$\mathscr{E}: \frac{(x-(-3))^2}{12^2} + \frac{(y-2)^2}{9^2} = 1$$

a zárójeleket négyzetre emeljük

$$\frac{x^2+6x+9}{144} + \frac{y^2-4y+4}{81} = 1 \qquad /.1\,296$$

eltüntetjük a törteket

$$9(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) = 1\,296$$

eltüntetjük a zárójeleket

$$9x^2 + 54x + 81 + 16y^2 - 64y + 64 = 1\,296 \qquad /-1\,296$$

redukáljuk egyenletünket, majd rendezzük

$\mathscr{E}$: $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y - 1\,151 = 0$

Írjuk fel az ellipszis általános egyenletét, ha ismertek: a = 15, e = 9, S(4; -5), AB ∥ y

először a kis féltengelyt számoljuk ki

$e^2 = a^2 - b^2 \to b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$

$$\mathscr{E}: \frac{(x-4)^2}{15^2} + \frac{(y-(-5))^2}{12^2} = 1$$

$$\frac{x^2-8x+16}{225} + \frac{y^2+10y+25}{144} = 1 \qquad /.3\,600$$

$$16(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 + 10y + 25) = 3\,600$$

$$16x^2 - 128x + 256 + 25y^2 + 250y + 625 = 3\,600 \qquad /-3\,600$$

$\mathscr{E}$: $16x^2 + 25y^2 - 128x + 250y - 2\,719 = 0$

Határozzuk meg az ellipszis S középpontjának; A, B, C, D csúcsainak és F_1, F_2 gyújtópontjainak a koordinátáit; a, b féltengelye hosszát és az e lineáris excentricitás értékét: $\mathscr{E}$: $169x^2 + 25y^2 + 376x + 150y - 3\,324 = 0$

$169x^2 + 25y^2 + 376x + 150y - 3\,324 = 0$

átrendezzük

$169x^2 + 376x + 25y^2 + 150y = 3\,324$

páronként kiemeljük a másodfokú tagok együtthatóit (csak az együtthatókat)

$169(x^2 + 4x) + 25(y^2 + 6y) = 3\,324$

teljes négyzetté egészítjük ki (kéttagú kifejezés nényzetére)

$169(x^2 + 4x + 2^2) + 25(y^2 + 6y + 3^2) = 3\,324 + 169.2^2 + 25.3^2$

$169(x + 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 3\,324 + 676 + 225$

elosztjuk egyenletünket a jobb oldali számmal – így ott 1 jelenik meg

$$169(x + 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 4\,225 \qquad /:4\,225$$

$$\frac{169(x+2)^2}{4\,225} + \frac{25(y+3)^2}{4\,225} = 1$$

a számlálókból eltüntetjük a számokat

$$\mathscr{E}: \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{169} = 1$$

S(-2;-3) $\qquad$ $169 > 25 \Rightarrow$ $\qquad$ a = 13 $\qquad$ b = 5

$e = \sqrt{169 - 25} = 12$

az y-t tartalmazó tört nevezőjében szerepel nagyobb érték (a) ⇒ AB ∥ y

A(-2; -3 – 13) = (-2; -16) $\qquad$ C(-2 – 5; -3) = (-7; -3) $\qquad$ F_1(-2; -3 – 12) = (-2; -15)

B(-2; -3 + 13) = (-2; 10) $\qquad$ D(-2 + 5; -3) = (3; -3) $\qquad$ F_2(-2; -3 + 12) = (-2; 9)

Határozzuk meg az ellipszis S középpontjának; A, B, C, D csúcsainak és F_1, F_2 gyújtópontjainak a koordinátáit; a, b féltengelye hosszát és az e lineáris excentricitás értékét: $\mathscr{E}$: $5x^2 + 8y^2 + 18x - 10y - 30 = 0$

$$5x^2 + 8y^2 + 18x - 10y - 30 = 0$$

$$5x^2 + 18x + 8y^2 - 10y = 30$$

$$5\left(x^2 + \frac{18}{5}x\right) + 8\left(y^2 - \frac{10}{8}y\right) = 30$$

$$5\left(x^2 + \frac{18}{5}x + \left(\frac{9}{5}\right)^2\right) + 8\left(y^2 - \frac{5}{4}y + \left(\frac{5}{8}\right)^2\right) = 30 + 5.\left(\frac{9}{5}\right)^2 + 8.\left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$5\left(x + \frac{9}{5}\right)^2 + 8\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = 30 + \frac{81}{5} + \frac{25}{8}$$

$$5\left(x + \frac{9}{5}\right)^2 + 8\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{1\,973}{40} \qquad /:\frac{1\,973}{40}$$

$$\frac{5\left(x+\frac{9}{5}\right)^2}{\frac{1\,973}{40}} + \frac{8\left(y-\frac{5}{8}\right)^2}{\frac{1\,973}{40}} = 1$$

$$\frac{\left(x+\frac{9}{5}\right)^2}{\frac{\frac{1\,973}{40}}{5}} + \frac{\left(y-\frac{5}{8}\right)^2}{\frac{\frac{1\,973}{40}}{8}} = 1$$

$$\mathscr{E}: \frac{\left(x+\frac{9}{5}\right)^2}{\frac{1\,973}{200}} + \frac{\left(y-\frac{5}{8}\right)^2}{\frac{1\,973}{320}} = 1$$

$S\left(-\frac{9}{5};\frac{5}{8}\right)$ $\frac{1\,973}{200} > \frac{1\,973}{320} \Rightarrow$ $a = \sqrt{\frac{1\,973}{200}} = 3{,}140\,9$ $b = \sqrt{\frac{1\,973}{320}} = 2{,}483\,1$

$e = \sqrt{\frac{1\,973}{200} - \frac{1\,973}{320}} = \sqrt{\frac{5\,919}{1\,600}} = 1{,}923\,4$

az x-et tartalmazó tört nevezőjében szerepel nagyobb érték (a) ⇒ AB ∥ x

$A\left(-\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{1\,973}{200}};\frac{5}{8}\right) =$
= (-4,941; 0,625)

$C\left(-\frac{9}{5};\frac{5}{8} + \sqrt{\frac{1\,973}{320}}\right) =$
= (-1,8; 3,108)

$F_1\left(-\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{5\,919}{1\,600}};\frac{5}{8}\right) =$
= (-3,723; 0,625)

$B\left(-\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{1\,973}{200}};\frac{5}{8}\right) =$
= (1,341; 0,625)

$D\left(-\frac{9}{5};\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{1\,973}{320}}\right) =$
= (-1,8; -1,858)

$F_2\left(-\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{5\,919}{1\,600}};\frac{5}{8}\right) =$
= (0,123; 0,625)