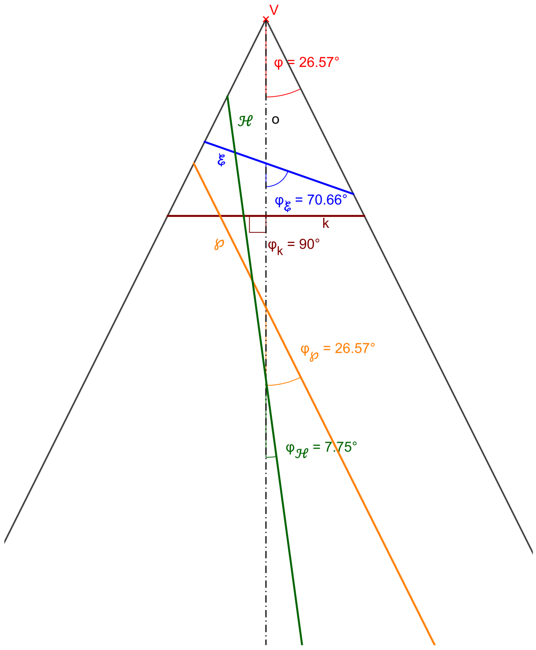
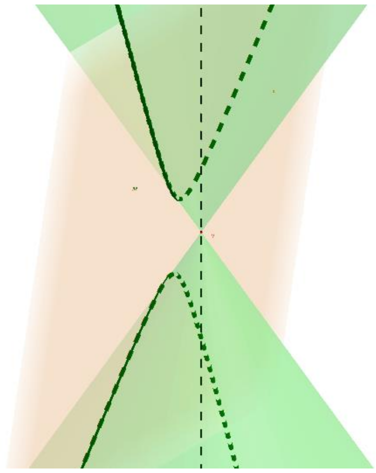
A hiperbola
(Hyperbola)

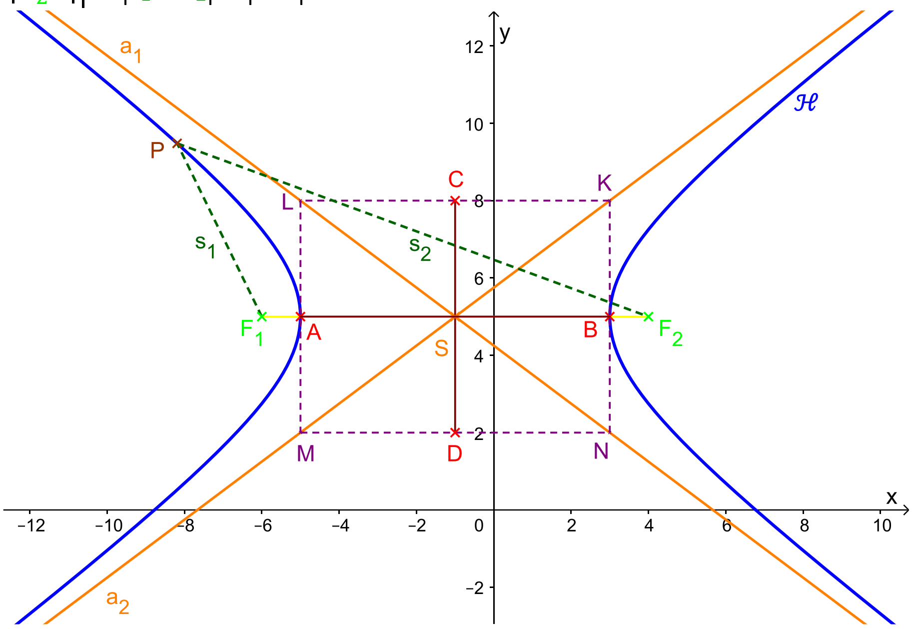
koordinátageometria: másodfokú (másodrendű) alakzat, másodfokú görbe
euklideszi geometria: kúpszelet (kúpfelület és sík metszésvonala) – mikor a sík párhuzamos a kúpfelület két alkotójával





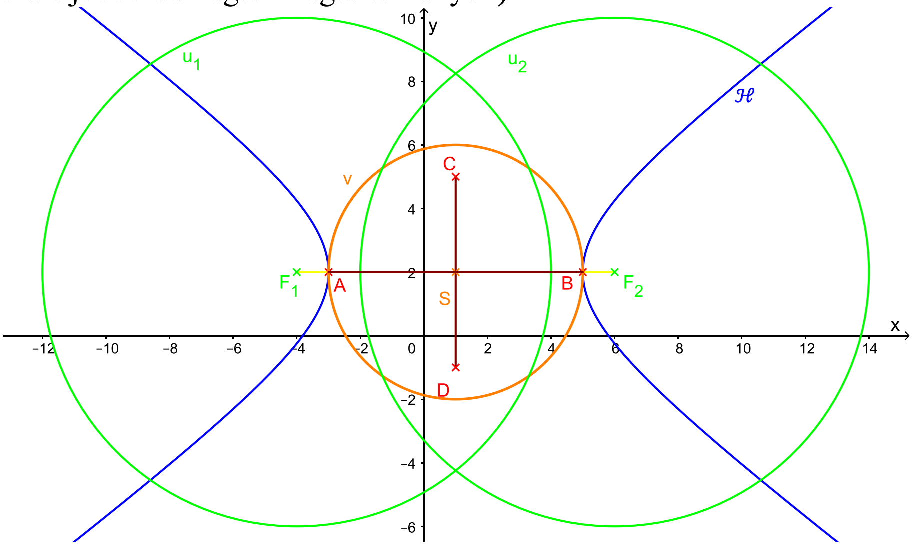
D. A ***hiperbola*** a sík azon pontjainak halmaza, melyeknek két előre adott ponttól mért távolságainak különbsége állandó. Ez a két pont a hiperbola gyújtópontja, a konstans különbség pedig a valós tengely hossza.

$\big||F_1P| - |F_2P|\big| = |s_1 - s_2| = |AB| = 2a$



S – a $\mathcal{H}$ középpontja (stred)
A, B – a $\mathcal{H}$ csúcsai (hlavné vrcholy): A, B ∈ $\mathcal{H}$
C, D – a $\mathcal{H}$ csúcsai (vedľajšie vrcholy): C, D ∈ $\mathcal{H}$
F_1, F_2 – a $\mathcal{H}$ gyújtópontjai/fókuszai (ohniská)
AB – a $\mathcal{H}$ valós tengelye (hlavná os)
$|AB| = 2a$ – a valós tengely hossza (a – valós féltengelye)
CD – az $\mathcal{H}$ képzetes tengelye (vedľajšia os)
$|CD| = 2b$ – a képzetes tengely hossza (b – képzetes féltengelye)
$|F_1S| = |SF_2| = e$ – lineáris excentricitás (ohnisková vzdialenosť, výstrednosť)
s_1; s_2 – a P pont vezérsugarai/rádiusz vektorok (sprievodiče)
karakterisztikus téglalap (charakteristický obdĺžnik) – A, B, C, D az oldalak felezőpontjai
a_1, a_2 – aszimptoták (végérintők – érintő a végtelenben) – a *karakterisztikus téglalap* átlói

a $\mathcal{H}$ belseje (belső pontjai) – a sík azon részei, melyek tartalmazzák a gyújtópontokat (balra a baloldali ágtól és jobbra a jobboldali ágtól – ágtartományok)



v – főkör (vrcholová kružnica): v(S, r = a)
u – vezérkör (určujúca kružnica): $u_1(F_1, r = 2a)$; $u_2(F_2, r = 2a)$

V. $e^2 = a^2 + b^2$

$\mathcal{H}$: S(u; v); a; b – a hiperbola középponti egyenlete:

$\mathcal{H}$: $\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ x (ágaival balra jobbra)

$\mathcal{H}$: $\frac{(y-v)^2}{a^2} - \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ y (ágaival fent és lent)

eltávolítjuk a zárójeleket, mindent egy oldalra viszünk (redukáljuk az egyenletet), rendezzük → a hiperbola általános egyenlete:

$\mathcal{H}$: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$ $A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$

feltétel: $A.B < 0$ (az A és a B ellentett előjelűek) ∧
∧ $BC^2 + AD^2 - 4ABE \neq 0$

a hiperbola paraméteres egyenlete:

$\mathcal{H}$: $x = \frac{a}{\cos\varphi}$; $y = b.\text{tg}\,\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi) \wedge \varphi \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

pontjainak koordinátái:

AB ∥ x:

A($u - a$; v)	C(u ; $v + b$)	$F_1(u - e; v)$
B($u + a$; v)	D(u ; $v - b$)	$F_2(u + e; v)$

AB ∥ y:

A(u; $v - a$)	C($u - b$; v)	$F_1(u; v - e)$
B(u; $v + a$)	D($u + b$; v)	$F_2(u; v + e)$

aszimptotái egyenlete:

AB ∥ x: iránytényezői – $k_{a_1,a_2} = \mp\frac{b}{a}$

a_1: $b.(x - u) + a.(y - v) = 0$ a_2: $b.(x - u) - a.(y - v) = 0$

a_1: $y = -\frac{b}{a}(x - u) + v$ a_2: $y = \frac{b}{a}(x - u) + v$

AB ∥ y: iránytényezői – $k_{a_1,a_2} = \pm\frac{a}{b}$

a_1: $a.(x - u) - b.(y - v) = 0$ a_2: $a.(x - u) + b.(y - v) = 0$

a_1: $y = \frac{a}{b}(x - u) + v$ a_2: $y = -\frac{a}{b}(x - u) + v$

példa:

Írjuk fel annak a hiperbolának az általános egyenletét, melynek valós tengelye párhuzamos az x tengellyel, és ismertek: a = 6, b = 8, S(-3; 2)

behelyettesítjük az adatokat a középponti egyenletbe

$$\mathcal{H}: \frac{(x-(-3))^2}{6^2} - \frac{(y-2)^2}{8^2} = 1$$

négyzetre emeljük a zárójeleket

$$\frac{x^2+6x+9}{36} - \frac{y^2-4y+4}{64} = 1 \qquad /.576$$

eltávolítjuk a törteket

$16(x^2 + 6x + 9) – 9(y^2 – 4y + 4) = 576$

felbontjuk a zárójeleket

$16x^2 + 96x + 144 – 9y^2 + 36y – 36 = 576 \qquad /-576$

redukáljuk az egyenletet, majd rendezzük

$\mathcal{H}: 16x^2 – 9y^2 + 96x + 36y – 468 = 0$

Írjuk fel annak a hiperbolának az általános egyenletét, melynek valós tengelye párhuzamos az *y* tengellyel, és ismertek: b = 15, e = 17, S(-1; -4)

előbb kiszámoljuk a valós féltengelyét

$e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow a = \sqrt{e^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

behelyettesítjük az adatokat a középponti egyenletbe

$$\mathcal{H}: \frac{(y-(-4))^2}{8^2} - \frac{(x-(-1))^2}{15^2} = 1$$

négyzetre emeljük a zárójeleket

$$\frac{y^2+8y+16}{64} - \frac{x^2+2x+1}{225} = 1 \qquad /.14\,400$$

eltávolítjuk a törteket

$225(y^2 + 8y + 16) – 64(x^2 + 2x + 1) = 14\,400$

felbontjuk a zárójeleket

$225y^2 + 1\,800y + 3\,600 – 64x^2 – 128y – 64 = 14\,400 \qquad /-14\,400$

redukáljuk az egyenletet, majd rendezzük

$\mathcal{H}: 225y^2 – 64x^2 + 1\,800y – 128x – 10\,864 = 0$

Határozzuk meg a hiperbola S középpontjának; A, B, C, D csúcsainak és F_1, F_2 gyújtópontjainak a koordinátáit; a, b féltengelye hosszát és az e lineáris excentricitás értékét. Írjuk fel aszimptotáinak egyenletét is:

$\mathcal{H}: 25x^2 – 144y^2 – 200x – 1\,440y + 400 = 0$

$25x^2 – 144y^2 – 200x – 1\,440y + 400 = 0$

rendezzük

$25x^2 – 200x – 144y^2 – 1\,440y = -400$

páronként kiemeljük a másodfokú tagok együtthatóit (csak az együtthatókat)

ügyeljünk az előjelre!

$25(x^2 – 8x) – 144(y^2 + 10y) = -400$

teljes négyzetté egészítjük ki (kéttagú kifejezés nényzetére)

$25(x^2 – 8x + 4^2) – 144(y^2 + 10y + 5^2) = -400 + 25.4^2 – 144.5^2$

$25(x – 4)^2 – 144(y + 5)^2 = -400 + 400 – 3\,600$

elosztjuk egyenletünket a jobb oldali számmal – így ott 1 jelenik meg

$25(x – 4)^2 – 144(y + 5)^2 = -3\,600 \qquad /:(-3\,600)$

$$\frac{25(x-4)^2}{-3\,600} - \frac{144(y+5)^2}{-3\,600} = 1$$

a számlálókból eltüntetjük a számokat

$$\frac{(x-4)^2}{-144} - \frac{(y+5)^2}{-25} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y+5)^2}{25} - \frac{(x-4)^2}{144} = 1$$

S(4;-5) a = 5 b = 12

$e = \sqrt{25 + 144} = 13$

az y-t tartalmazó tört előtt van pozitív előjel ⇒ AB ∥ *y*

A(4; -5 – 5) = (4; -10) C(4 – 12; -5) = (-8; -5) F_1(4; -5 – 13) = (4; -18)
B(4; -5 + 5) = (4; 0) D(4 + 12; -5) = (6; -5) F_2(4; -5 + 13) = (4; 8)

$k_{1,2} = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{5}{12}$

$y = \pm\frac{5}{12}(x-4) - 5$

a_1: $y = \frac{5}{12}x - \frac{20}{3}$ a_2: $y = -\frac{5}{12}x - \frac{10}{3}$

a_1: $5x - 12y - 80 = 0$ a_2: $5x + 12y + 40 = 0$

Határozzuk meg a hiperbola S középpontjának; A, B, C, D csúcsainak és F_1, F_2 gyújtópontjainak a koordinátáit; a, b féltengelye hosszát és az e lineáris excentricitás értékét. Írjuk fel aszimptotáinak egyenletét is:

$\mathscr{H}$: $9x^2 - 6y^2 - 15x - 8y - 20 = 0$

$$9x^2 - 6y^2 - 15x - 8y - 20 = 0$$
$$9x^2 - 15x - 6y^2 - 8y = 20$$
$$9\left(x^2 - \frac{15}{9}x\right) - 6\left(y^2 + \frac{8}{6}y\right) = 20$$
$$9\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - 6\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 20 + 9.\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 6.\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$9\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 6\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 20 + \frac{25}{4} - \frac{8}{3}$$
$$9\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 6\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{283}{12} \qquad /:\frac{283}{12}$$
$$\frac{9\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{283}{12}} - \frac{6\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{283}{12}} = 1$$
$$\frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{\frac{283}{12}}{9}} - \frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{\frac{283}{12}}{6}} = 1$$
$$\mathscr{H}: \frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{283}{106}} - \frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{283}{72}} = 1$$

$S\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right)$ $a = \sqrt{\frac{283}{106}} = 1{,}634\ 0$ $b = \sqrt{\frac{283}{72}} = 1{,}982\ 6$

$e = \sqrt{\frac{283}{106} + \frac{283}{72}} = \sqrt{\frac{1\,415}{216}} = 2{,}559\ 5$

az x-et tartalmazó tört előtt van pozitív előjel ⇒ AB ∥ x

$A\left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{283}{106}}; -\frac{2}{3}\right) =$
= (-0,800 6; -0,666 7)

$C\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{283}{72}}\right) =$
= (0,833 3; 1,315 9)

$F_1\left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{1\,415}{216}}; -\frac{2}{3}\right) =$
= (-1,726 1; -0,666 7)

$B\left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{283}{106}}; -\frac{2}{3}\right) =$
= (2,467 3; -0,666 7)

$D\left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{283}{72}}\right) =$
= (0,833 3; -2,649 2)

$F_2\left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{1\,415}{216}}; -\frac{2}{3}\right) =$
= (3,392 8; -0,666 7)

$k_{1,2} = \mp\frac{b}{a} = \mp\frac{\sqrt{\frac{283}{72}}}{\sqrt{\frac{283}{106}}} = \mp\frac{\sqrt{53}}{6} = \mp 1{,}213\ 4$

$y = \mp\frac{\sqrt{53}}{6}\left(x - \frac{5}{6}\right) - \frac{2}{3}$

a_1: $y = -\frac{\sqrt{53}}{6}x + \frac{-24+5\sqrt{53}}{36}$ a_2: $y = \frac{\sqrt{53}}{6}x + \frac{-24-5\sqrt{53}}{36}$

a_1: $6\sqrt{53}x + 36y + 24 - 5\sqrt{53} = 0$ a_2: $6\sqrt{53}x - 36y - 24 + 5\sqrt{53} = 0$