

Vzorce (mocniny dvojčlenov)

V. Prirodzené mocniny dvojčlena (súčtu a rozdielu) a súčet a rozdiel prirodzených mocnín:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

Rozloženie mnohočlena na súčin

Doteraz sme odstraňovali zátvorky (násobenie jednočlena s mnohočlenom, násobenie mnohočlena s mnohočlenom, umocnenie dvojčlena). Niekedy musíme skôr odstrániť zátvorky, aby po zlúčení členov sme mohli dostať jednoduchší výraz. Ale sú prípady, keď práve z mnohočlenov potrebujeme urobiť súčin.

Ak chceme zlúčiť lomené výrazy, krátiť (zjednodušiť) zlomok, riešiť rovnicu vyššieho stupňa (toto všeobecne neplatí); potrebujeme upraviť mnohočlen na súčin. Dve možnosti máme – vlastne tri:

- mnohočlen sa nedá rozložiť na súčin (tie mnohočleny sa volajú ireducibilné polynómy – maximálne číslo sa z nich dá vyňať)
- vynímanie pred zátvorku
- pomocou vzorca

Aby človek v zložitejšom mnohočlene (členy obsahujúce súčin viacerých mocnín rôznych premenných) uvidel jeden z horeuvedených vzorcov, musí mať veľké skúsenosti – veľa vyriešených príkladov. Nás skôr zaujímajú príklady, kde rozloženie na súčin je pomocou vyňatia (niekedy aj viacnásobného) pred zátvorku.

Ak z mnohočlena sa dá „niečo“ vyňať, potom je to vlastne spoločný deliteľ všetkých členov toho mnohočlena – a my hľadáme z nich ten najväčší. Pri hľadaní najväčšieho spoločného deliteľa vychádzame z poznatkov zo základnej školy. Konkrétne z teórie čísel: najväčší spoločný deliteľ (NSD – GCD: „greatest common divisor“) čísel.

Ak hľadáme NSD, klasicky človek vymenuje všetky delitele oboch čísel, a nájde medzi nimi najväčší zo spoločných deliteľov. Existujú aj iné spôsoby (pr. Euklidov algoritmus), ale ak človek vyjadrí čísla ako súčin mocnín prvočísel (provočíselný rozklad), potom NSD je súčin menších mocnín prvočísel z provočíselného rozkladu – ak číslo neobsahuje mocninu provočísla z rozkladu druhého čísla, potom vlastne obsahuje jeho nultú mocninu [bude chýbať zo súčinu]. Pri hľadaní NSD viacerých čísel sa bere vždy najmenšia vyskytujúca sa mocnina toho prvočísla (vrátane nulte mocniny – čiže bez výskytu).

$$(4\,200, 15\,876) = ?$$

$$4\,200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$15\,876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2$$

$$(4\,200, 15\,876) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 = 84$$

Týmto spôsobom nájdeme aj najväčší spoločný deliteľ členov – pre koeficienty aj pre premenné. NSD sa skladá zo súčinu najnižších mocnín všetkých činiteľov vyskytujúcich sa v členoch.

$$(180x^3yz^7, 1\,350y^4z^3, 120x^4y^2z^5) = ?$$

$$180x^3yz^7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot y^1 \cdot z^7$$

$$1\,350y^4z^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot y^4 \cdot z^3$$

$$120x^4y^2z^5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^5$$

$$(180x^3yz^7, 1\,350y^4z^3, 120x^4y^2z^5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y \cdot z^3 = 30yz^3$$

Keď sme už našli najväčší spoločný deliteľ členov, potom ho môžeme vyňať pred zátvorku. Potom do zátvorky sa dostanú členy vydelené s vyňatým výrazom.

$$\begin{aligned} 180x^3yz^7 + 1\,350y^4z^3 - 120x^4y^2z^5 &= 30yz^3 \cdot \left(\frac{180x^3yz^7}{30yz^3} + \frac{1\,350y^4z^3}{30yz^3} - \frac{120x^4y^2z^5}{30yz^3} \right) = \\ &= 30yz^3(6x^3z^4 + 45y^3 - 4x^4yz^2) \end{aligned}$$

P. Ak sme správne vyňali z mnohočlena, potom v zátvorke máme mať presne toľko členov, z koľkých sme vyňali pred zátvorku ich NSD.

Najčastejšia chyba, ak vyjmeme presne jeden člen toho výrazu, a voľakto nenapíše jednotku ako ich podiel:

$$x^3 - 3x^2 + x = x \cdot (x^2 - 3x + 1) \quad \text{a nie} \quad x \cdot (x^2 - 3x)$$

P. Ak členy sa nedali zlúčiť pred vyňatím, potom ani v zátvorke sa nedajú zlúčiť.

P. Môžeme urobiť skúšku (v hlave): skúsme roznásobiť zátvorku – ak sme vyňali správne, potom dostaneme naspäť pôvodný mnohočlen.

Niekedy sa ale nedá naraz vyňať zo všetkých členov mnohočlena. Vtedy môžeme skúsiť vyňať po skupinách – väčšinou vo dvojiciach, niekedy v trojiciach. Ak správne vyjmeme niečo, potom nás čaká ďalšie vyňatie – v zátvorkách máme rovnaké výrazy, čo môžeme v ďalšom kroku vyňať.

$$\begin{aligned} 12x^3 - 20x^2 + 6x - 10 &= 4x^2(3x - 5) + 2(3x - 5) = (3x - 5)(4x^2 + 2) = 2(3x - 5)(2x^2 + 1) \\ 12x^3 - 20x^2 + 6x - 10 &= 6x(2x^2 + 1) - 10(2x^2 + 1) = (2x^2 + 1)(6x - 10) = 2(2x^2 + 1)(3x - 5) \end{aligned}$$

príklad:

Umocnite:

a, $(x + 1)^2$

b, $(2x^2 + 1)^2$

c, $\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{5}{2}x^2y^4\right)^2$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2x^2 + 1)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3y - \frac{5}{2}x^2y^4\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x^3y\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x^3y \cdot \frac{5}{2}x^2y^4 + \left(\frac{5}{2}x^2y^4\right)^2 = \frac{4}{9}x^6y^2 - \frac{10}{3}x^5y^5 + \frac{25}{4}x^4y^8$$

Umocnite:

a, $(x - 3)^3$

b, $(2x + y^3)^4$

c, $\left(\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^3y^3\right)^3$

$$(x - 3)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$(2x + y^3)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot y^3 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot (y^3)^2 + 4 \cdot 2x \cdot (y^3)^3 + (y^3)^4 = 16x^4 + 32x^3y^3 + 24x^2y^6 + 8xy^9 + y^{12}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{2}{3}x^3y^3\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2 \cdot \frac{2}{3}x^3y^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2y^3 \cdot \left(\frac{2}{3}x^3y^3\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x^3y^3\right)^3 = \\ &= \frac{1}{8}x^6y^9 - \frac{1}{2}x^7y^9 + \frac{2}{3}x^8y^9 - \frac{8}{27}x^9y^9 \end{aligned}$$

Vynásobte použitím vzorca:

a, $(x + 5)(x - 5)$

b, $(5x^2 - y^4)(5x^2 + y^4)$

c, $\left(\frac{1}{3}xy^2 + \frac{4}{3}x^3y^4\right)\left(\frac{1}{3}xy^2 - \frac{4}{3}x^3y^4\right)$

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$$

$$(5x^2 - y^4)(5x^2 + y^4) = (5x^2)^2 - (y^4)^2 = 25x^4 - y^8$$

$$\left(\frac{1}{3}xy^2 + \frac{4}{3}x^3y^4\right)\left(\frac{1}{3}xy^2 - \frac{4}{3}x^3y^4\right) = \left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2 - \left(\frac{4}{3}x^3y^4\right)^2 = \frac{1}{9}x^2y^4 - \frac{16}{9}x^6y^8$$

Rozložte na súčin mnohočleny:

a, $kx + ky$

b, $x^2 - xy$

c, $8a^3b^5 - 28a^2b^3 + 20a^4b^4$

d, $xc + xd - yd - yc$

e, $ab + ac - bc - a^2$

f, $4x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2$

g, $x^4 - 4x^3 + 4x^2$

h, $25a^6b^4 - 49a^2b^8$

i, $x^2 - y^2 + 12yz - 36z^2$

$$kx + ky = k(x + y)$$

$$x^2 - xy = x(x - y)$$

$$8a^3b^5 - 28a^2b^3 + 20a^4b^4 = 4a^2b^3(2ab^2 - 7 + 5a^2b)$$

$$xc + xd - yd - yc = x(c + d) - y(d + c) = (c + d)(x - y)$$

$$ab + ac - bc - a^2 = a(b - a) - c(-a + b) = (b - a)(a - c)$$

$$4x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 4x^4(x + 1) - 3x^2(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(4x^4 - 3x^2 - 2)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = (x^2 - 2x)^2 \text{ alebo } = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x - 2)^2$$

$$25a^6b^4 - 49a^2b^8 = (5a^3b^2 + 7ab^4)(5a^3b^2 - 7ab^4)$$

$$x^2 - y^2 + 12yz - 36z^2 = x^2 - (y^2 - 12yz + 36z^2) = x^2 - (y - 6z)^2 = (x + (y - 6z))(x - (y - 6z)) = (x + y - 6z)(x - y + 6z)$$

Umocnite:

$$a, (a + b)^2$$

$$b, (a - b)^2$$

$$c, (x + y)^2$$

$$d, (a + 3)^2$$

$$e, (b - 2)^2$$

$$f, (3a - b)^2$$

$$g, (3y + x)^2$$

$$h, (3x - 2y)^2$$

$$i, (5a + 3b)^2$$

$$j, (a^2 + 1)^2$$

$$k, (x^3 + 1)^2$$

$$l, (x^2 + y^2)^2$$

$$m, (a^3 - b^3)^2$$

$$n, \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$o, \left(y - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$p, \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2$$

$$q, \left(\frac{5}{6}x^3y^2 + \frac{3}{5}xy\right)^2$$

$$r, \left(\frac{2}{3}a^3b^4 - 2\frac{1}{2}a^5b\right)^2$$

$$s, \left(\frac{4}{5}a^3b^3 - 1\frac{1}{4}a^2b^3\right)^2$$

Vynásobte pomocou vzorca:

$$a, (a + 2)(a - 2)$$

$$b, (x - 1)(x + 1)$$

$$c, (2x + y)(2x - y)$$

$$d, (2b - 3a)(2b + 3a)$$

$$e, \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$$

$$f, \left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}b^2\right)$$

Rozložte dané mnohočleny:

$$a, x^4 + x^3 + x + 1;$$

$$b, (x + y)^3 - (x - y)^3;$$

$$c, x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1;$$

$$d, x^3 - \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{27}xy^2 - \frac{1}{729}y^3.$$

Rozložte na súčin mnohočleny:

$$a, 4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2;$$

$$b, 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27;$$

$$c, x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x.$$