

Lineáris egyenletek (Lineárne rovnice)

D. Az **egyenletnek** két oldala van (az **egyenlet bal és jobb oldala**) közöttük pedig az „=” jel, miközben legalább az egyik oldalnak kifejezést kell tartalmaznia (vagyis legalább egy **ismeretlent**).

M. Mivel a középiskola tananyagában szereplő egyenletek mind egy változót tartalmaznak, így egyenleteink csak egyismeretlenesek lesznek.

egy szám az egyenlet megoldása/gyöke (číslo je riešením/koreňom rovnice) – a számot az eredeti egyenletbe behelyettesítve az egyenlet mindkét oldalán azonos értéket kapunk (érvényes az egyenlőség)

megoldani az egyenletet (riešiť rovnicu) – megkeresni az egyenlet összes megoldását

az egyenlet megoldáshalmaza (množina riešení/obor pravdivosti rovnice) – az egyenlet megoldásait tartalmazó halmaz

az egyenlet ekvivalens átalakítása (ekvivalentná úprava rovnice) – az egyenletnek az átalakítás előtt és után pontosan ugyanaz a megoldáshalmaza → nem adódik hozzá és nem tűnik el megoldás

ekvivalens átalakítások:

- az egyenlet mindkét oldalához **hozzáadhatjuk** ugyanazt a számot vagy kifejezést → tagok átvitele az egyenlet egyik oldaláról a másikra

$$\begin{array}{rcl} 7x - 2 = 18 + 2x & & /+ 2 \\ 7x = 20 + 2x & & /- 2x \\ 5x = 20 & & \end{array}$$

- az egyenlet mindkét oldalát **megszorozhatjuk** ugyanazzal a **nullától különböző** számmal vagy kifejezéssel → törtek és együtthatók eltüntetése

$$\begin{array}{rcl} \frac{7x-2}{2} = 9 + x & & / \cdot 2 \\ 7x - 2 = 18 + 2x & & \\ \dots & & \\ 5x = 20 & & / : 5 \\ x = 4 & & \end{array}$$

M. Nem szükséges külön említeni a „**kivonni**” és az „**elosztani**” műveleteket:

a kivonás helyettesíthető az ellentett szám vagy kifejezés hozzáadásával: $-2x \equiv +(-2x)$

az osztás helyettesíthető a szám vagy a kifejezés reciprokával történő beszorzással: $:5 \equiv \cdot \frac{1}{5}$

M. Ezen ekvivalens átalakítások a valós számok tulajdonságain alapulnak.

Még megengedett művelet az egyenlet oldalainak felcserélése (viszont teljesen mindegy, hogy a megoldásnál az utolsó sorban az ismeretlen a baloldalon vagy a szám pedig a jobbon vagy fordítva). Ez viszont nem valódi átalakítás.

ellenőrzés/próba (skúška správnosti) – az eredményt/eredményeket behelyettesítjük az egyenlet eredeti alakjába → ha fennáll az egyenlőség, akkor megoldása az egyenletnek, amennyiben nem, akkor nem megoldás.

M. Tetszőleges egyenlettípusnál a teljes megoldás mindig tartalmazza az ellenőrzést (próbát) is.

egyenletek osztályozása:

az **ismeretlenek száma** szerint: egyismeretlenes, kétismeretlenes, háromismeretlenes, ...

megoldhatóság szempontjából: azonosság (mindig érvényes), megoldható, ellentmondás (megoldhatatlan)

függvények szerint: algebrai, transzcendens

algebrai: lineáris (elsőfokú), másodfokú, harmadfokú, negyedfokú, ...; diofantoszi (a $\mathbb{Z}$ halmazon)

transzcendens: abszolút értékes, exponenciális, logaritmikus, trigonometrikus, ...

Ha kapunk egy egyismeretlenes egyenletet, mely zárójeleket, törtkifejezéseket és semmi más függvényt nem tartalmaz, első ránézésre nem megmondható, hogy milyen egyenlettel állunk szemben (fokszámát tekintve).

D. Egy **egyenlet lineáris**, ha olyan alakra hozható (törtek eltüntetésével, zárójelek felbontásával, tagok rendezésével és összevonásával), hogy az egyenlet egyik oldalán lineáris függvény szerepeljen a másikon pedig nulla.

$$a \cdot x + b = 0 \quad \text{vagy} \quad 0 = a \cdot x + b$$

Ekkor egyenletünk megoldása: $x = -\frac{b}{a}$.

Ez pontosan az a pont, ahol a lineáris függvény grafikonja áthalad az x tengelyen.

Ha a lineáris függvényeket kibővítjük a konstans függvényekkel (a konstans függvényt a lineáris függvény speciális esetének tekinthetjük, ahol $a = 0$), akkor tudhatjuk, hogy ezek grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes, vagy akár maga a tengely.

Pontosan ezért a lineáris egyenlet megoldásai számát tekintve háromféle lehet:

- a, a lineáris egyenletnek egy megoldása van – ez a klasszikus lineáris egyenlet (a példák zöme)
- b, a lineáris egyenletnek nincs megoldása – eredményként egy **hamis állítás** kapunk (két különböző szám egyenlőségét)
- c, a lineáris egyenletnek végtelen sok megoldása van – eredményként egy **igaz állítás** kapunk (azonos számok egyenlőségét)

M. Ha az egyenletnek végtelen sok megoldása van, az nem jelenti mindig az összes valós számot (az $\mathbb{R}$ halmaz):

- ha megoldásunk elején feltételeket szabtuk (az egyenlet olyan kifejezést/kifejezéseket tartalmaz, mely/melyek nincsenek minden számra értelmezve [*törtkifejezés, gyökkifejezés, ...*] – ezeket ki kell zárni a megoldáshalmazból
- ha egyenletünket valamilyen speciális számhalmazon kell megoldanunk – akkor a megoldás pontosan ez a különleges halmaz lesz, kivéve az esetleges feltételekben szereplő értékeket az a, pont szerint (ha vannak)

példa:

Oldjuk meg a lineáris egyenleteket:

$$a, -7x - 3 = 0$$

$$b, \frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = 4$$

$$c, 3(2x + 1) - 2(1 - 3x) = 4(3x + 1) - 3$$

$$d, 4(3x - 2) - 5x = 2(2x - 1) + 3(x - 5)$$

$$e, (x - 2)(x + 5) - (4 + x)(3 + x) = 10$$

$$-7x - 3 = 0$$

$$/+3$$

$$-7x = 3$$

$$/:(-7)$$

$$x = -\frac{3}{7}$$

$$B: -7 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - 3 = \frac{21}{7} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$J: 0$$

$$B = J$$

$$P = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = 4$$

$$/.15$$

$$10x + 6 = 60$$

$$/-6$$

$$10x = 54$$

$$/:10$$

$$x = 5,4 = \frac{27}{5}$$

$$B: \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{5} + \frac{2}{5} = \frac{18}{5} + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$J: 4$$

$$B = J$$

$$P = \{5,4\}$$

$$3(2x + 1) - 2(1 - 3x) = 4(3x + 1) - 3$$

$$6x + 3 - 2 + 6x = 12x + 4 - 3$$

$$12x + 1 = 12x + 1$$

$$/-12x$$

$$1 = 1$$

igaz állítás

ellenőrzésnél bármilyen számot választhatunk – pl. $x = 1$

$$B: 3(2 \cdot 1 + 1) - 2(1 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 9 + 4 = 13$$

$$J: 4(3 \cdot 1 + 1) - 3 = 4 \cdot 4 - 3 = 16 - 3 = 13$$

$$B = J$$

$$P = \mathbb{R}$$

$$4(3x - 2) - 5x = 2(2x - 1) + 3(x - 5)$$

$$12x - 8 - 5x = 4x - 2 + 3x - 15$$

$$7x - 8 = 7x - 17 \quad /-7x$$

$$-8 = -17 \quad \text{hamis állítás}$$

$$-8 \neq -17$$

nincs megoldása – $P = \emptyset$

$$(x-2)(x+5) - (4+x)(3+x) = 10$$

$$x^2 + 5x - 2x - 10 - (12 + 4x + 3x + x^2) = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 - (12 + 7x + x^2) = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 - 12 - 7x - x^2 = 10$$

$$-4x - 22 = 10 \quad /+22$$

$$-4x = 32 \quad /:(-4)$$

$$x = -8$$

$$B: (-8-2)(-8+5) - (4+(-8))(3+(-8)) = -10 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-5) = 30 - 20 = 10$$

$$J: 10$$

$$B = J$$

$$P = \{-8\}$$

A lineáris egyenletek **törtkifejezéseket** is tartalmazhatnak. Az ilyen egyenleteknél ugyanaz érvényes, mint a törtkifejezéseknél. Az ekvivalens átalakítások végrehajtása előtt feltételeket kell szabnunk, mikor van értelme a törtkifejezésnek/törtkifejezéseknek. Ezeket a feltételeket egyszer szoktuk aláhúzni, hogy könnyebben megtaláljuk az eredmény összehasonlításánál.

Ezek után megoldjuk egyenletünket. Az kapott eredményt legelőször a feltétellel/feltételekkel hasonlítjuk össze. Ha kielégíti az összes feltétel, csak utána tekinthetjük megoldásnak a kapott eredményt. Utána aláhúzhatjuk kétszer.

példa:

Oldjuk meg a lineáris egyenleteket:

$$a, 3x + \frac{x^2-9}{x+3} = -15 \quad b, \frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3} \quad c, \frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{x}{x^2-2x}$$

$$d, \frac{2x-7}{2x^2-4x+2} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{3-3x} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} \quad e, \frac{3}{4x^2+20x+25} + \frac{4}{4x^2+4x+1} = \frac{7}{4x^2+12x+5}$$

$$x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

$$3x + \frac{x^2-9}{x+3} = -15$$

$$3x + \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = -15$$

$$3x + x - 3 = -15$$

$$4x - 3 = -15 \quad /+3$$

$$4x = -12 \quad /:4$$

$$x = -3$$

az eredmény összehasonlítjuk a feltétellel: pontosan ez az érték nem lehet megoldás $\Rightarrow$ az egyenletnek nincs megoldása

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$\frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3} \quad / \cdot (x-3)$$

$$2x = 2 \cdot (x-3) + 6$$

$$2x = 2x - 6 + 6$$

$$2x = 2x \quad /-2x$$

$$0 = 0$$

igaz állítást kaptunk $\Rightarrow$ az egyenletnek végtelen sok megoldása van: az összes valós szám a feltételben szereplők kivételével

$$P = \mathbb{R} \setminus \{3\} + \text{ellenőrzés}$$

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$|x| \neq 2$$

$$x \neq -2 \text{ a } x \neq 2$$

$$x^2 + 2x \neq 0$$

$$x(x+2) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\frac{\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x}}{\frac{2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)}} = \frac{\frac{x}{x^2-2x}}{\frac{x}{x(x-2)}}$$

$$/ \cdot x(x-2)(x+2)$$

$$2 \cdot x + (x-4) \cdot (x-2) = x \cdot (x+2)$$

$$2x + x^2 - 2x - 4x + 8 = x^2 + 2x$$

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 + 2x$$

$$8 = 6x$$

$$\frac{8}{6} = x$$

$$/ -x^2 + 4x$$

$$/:6$$

$$P = \left\{ \frac{4}{3} \right\} + \text{próba}$$

$$2x^2 - 4x + 2 \neq 0$$

$$2(x^2 - 2x + 1) \neq 0$$

$$2(x-1)^2 \neq 0$$

$$(x-1)^2 \neq 0$$

$$|x-1| \neq 0$$

$$x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$3 - 3x \neq 0$$

$$3(1-x) \neq 0$$

nincs újabb feltétel

$$\frac{2x-7}{2x^2-4x+2} - \frac{2}{2x-7} = \frac{1}{3-3x} - \frac{x+1}{x^2-2x+1}$$

$$\frac{2(x-1)^2}{2x-7} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{3(1-x)}{1} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x-7}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{-3(-1+x)} - \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$/ \cdot 6(x-1)^2$$

$$(2x-7) \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot (x-1) = -2(x-1) - (x+1) \cdot 6$$

$$6x - 21 - 12x + 12 = -2x + 2 - 6x - 6$$

$$-6x - 9 = -8x - 4$$

$$/+ 8x + 9$$

$$2x = 5$$

$$/:2$$

$$x = 2,5$$

$$P = \{2,5\} + \text{ellenőrzés}$$

$$4x^2 + 20x + 25 \neq 0$$

$$(2x+5)^2 \neq 0$$

$$|2x+5| \neq 0$$

$$2x+5 \neq 0$$

$$x \neq -2,5$$

$$4x^2 + 4x + 1 \neq 0$$

$$(2x+1)^2 \neq 0$$

$$|2x+1| \neq 0$$

$$2x+1 \neq 0$$

$$x \neq -0,5$$

$$4x^2 + 12x + 5 \neq 0$$

$$(2x+5)(2x+1) \neq 0$$

ebből nem kapunk újabb feltételt

$$\frac{3}{4x^2+20x+25} + \frac{4}{4x^2+4x+1} = \frac{7}{4x^2+12x+5}$$

$$\frac{3}{(2x+5)^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+5)(2x+1)}$$

$$/ \cdot (2x+5)^2 \cdot (2x+1)^2$$

$$3 \cdot (2x+1)^2 + 4 \cdot (2x+5)^2 = 7 \cdot (2x+5)(2x+1)$$

$$3 \cdot (4x^2 + 4x + 1) + 4 \cdot (4x^2 + 20x + 25) = 7 \cdot (4x^2 + 2x + 10x + 5)$$

$$12x^2 + 12x + 3 + 16x^2 + 80x + 100 = 28x^2 + 14x + 70 + 35$$

$$28x^2 + 92x + 103 = 28x^2 + 84x + 35$$

$$/ -28x^2 - 84x - 103$$

$$8x = -68$$

$$/:8$$

$$x = -8,5$$

$P = \{-8,5\}$ + próba

Oldjuk meg a lineáris egyenleteket az $\mathbb{R}$ halmazon. Végezzük el az ellenőrzést is.

$$a, 3x + \frac{1}{4} = 0$$

$$b, x - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

$$c, -2x + 1 = x - 2$$

$$d, \frac{x}{2} + 2 = -\frac{3}{4}$$

$$e, \frac{2x}{11} + 3 = 0$$

$$f, \frac{-7}{2}x + 1 = 2x$$

$$g, -\frac{35}{10} = \frac{2}{5}a$$

$$h, \frac{x}{4} - 3,6 = 0$$

$$i, 4s - 17 = -9$$

Az adott egyenleteket oldjátok meg az $\langle 1; 4 \rangle$ intervallumon! A megoldást kerekítsétek három tizedesjegyre, és végezzétek el a próbát!

$$a, x + 2 - \frac{2x-0,8+0,6x}{15} - 1,4x = 0,1(3-x)$$

$$b, a - \frac{2-\frac{3a}{4}}{5} - 9 = \frac{6-\frac{a}{7}}{8}$$

$$c, x - \frac{1-1,5x}{4} = \frac{20-2,5x}{30} + 2$$

$$d, \frac{0,31+0,22u}{0,3} - 0,25 = 0,8 + 0,05u$$

Oldjuk meg a lineáris egyenleteket az $\mathbb{R}$ halmazon:

$$a, (6x + 3) - (3x - 4) = (x - 4) - (x + 1) \quad b, \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6}$$

$$c, (x - 3)(x - 4) - (1 - x)(2 - x) = 0 \quad d, 2[3(4 - x) - 2(3 + 2x) - 2] = 44$$

$$e, \frac{x-1}{2} + \frac{3x-1}{4} - \frac{5x-1}{6} = 2$$

$$f, x + \frac{x+1}{4} = 2x + \frac{5-3x}{2} - \frac{x-3}{8}$$

Oldjuk meg az adott egyenleteket az $\mathbb{R}$ halmazon:

$$a, \frac{3x-2}{x} = 4$$

$$b, \frac{x-1}{3x+2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$c, \frac{a-1}{a+1} = 0$$

$$d, \frac{2x-4}{x+2} = 6$$

$$e, \frac{2x}{x+3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f, -\frac{5}{7x} + 1 = \frac{11}{9}$$

Oldjuk meg az adott egyenleteket az $\mathbb{R}$ halmazon és végezzük el a próbát is:

$$a, \frac{x^2-11x+2}{x} = x - 15$$

$$b, \frac{x^2-3}{x-1} + 2 = x + 2$$

$$c, \frac{3y^2+y-11,2}{y+3,8} = y + 2(y + 1)$$